

Les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$ pour $n \geq 1$ et dérivables sur $]0, 1[$ avec

$$u'_n(x) = x^{n-1}(1 + n \ln x)$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0,1]} |u_n| = -u_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \rightarrow 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Pour $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \rightarrow 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$.

On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n(x)$	0	M_n	0

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1 + \frac{1}{n-1})} = \frac{e^{-\frac{1}{n} \ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \rightarrow 0$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

a) Soit $x \in [0, +\infty[$.

Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $x > 0$ alors $u_n(x) \rightarrow 0$ car $e^{-nx} \rightarrow 0$.

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

b) On a

$$\sup_{[a, +\infty[} |u_n(x)| \leq e^{-na} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = e^{-\pi/2} \not\rightarrow 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur \mathbb{R} .

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur \mathbb{R} et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$. Il y a donc convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ est sommable.

Pour $x \neq 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée et donc la série numérique

$\sum f_n(x)$ converge.

On peut donc affirmer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .
L'étude des variations des fonctions f_n donne

$$\|f_n\|_\infty = f_n(2/\sqrt{n}) = \frac{4}{e^2}$$

Il n'y a donc pas convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ .
En revanche, pour $a > 0$ et n assez grand de sorte que $2/\sqrt{n} \leq a$, on a

$$\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$$

et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ car la série numérique $\sum f_n(a)$ converge.

A fortiori, il y a aussi convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Montrons qu'il n'y a cependant pas convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, la fonction somme de la série $\sum f_n$ serait continue car chaque f_n est continue. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par positivité des fonctions sommées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) \geq f_N\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \frac{4}{e^2}$$

et donc la fonction somme ne tend pas vers 0 en 0.

Ceci contredit sa continuité.