MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 5

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel positif x, on pose :

$$u_n(x) = \sin(nx)e^{-nx}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme de cette suite sur $[a, +\infty[$ avec a un réel strictement positif fixé.
3. Étudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

On définit $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $]0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x) \text{ et } u_n(0) = 0.$$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. En déduire l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 5

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n(0) = 0$ et pour tout x de $]0, 1]$:

$$u_n(x) = x^n \ln(x).$$

A-ton CVU sur $[0, 1]$?

Exercice 2

On définit $(u_n(x))_{n\in`\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire la convergence pour tout $x \in [0, 1]$ de la suite $(u_n(x))$.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $u'(x) = u(x - x^2)$.

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 5

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Continuité de ζ sur $]1, +\infty[$ et limite de ζ en $+\infty$.

Exercice 1

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ pour } x \text{ réel et } n \text{ entier naturel non nul.}$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on introduit la fonction f_n suivante :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$.
3. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?
4. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec a un réel strictement positif.