Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ pour $n \geqslant 1$ et dérivables sur $]0,1]$ avec

$$u_n'(x) = x^{n-1}(1 + n \ln x)$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0,1]} |u_n| = -u_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{n\mathrm{e}} \to 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Pour $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \to 0$ car $|f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n}$.
On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2 x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \to 0$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

---

a) Soit $x \in [0, +\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
b) On a

$$\sup_{[a,+\infty[} |u_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geqslant u_n(\pi/2n) = \mathrm{e}^{-\pi/2} \not\to 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{N+1+x^2} \leqslant \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leqslant \frac{1}{N+1} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ est sommable.
Pour $x \neq 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée et donc la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
On peut donc affirmer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
L'étude des variations des fonctions f_n donne

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(2/\sqrt{n}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

Il n'y a donc par convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche, pour $a > 0$ et n assez grand de sorte que $2/\sqrt{n} \leqslant a$, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$$

et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ car la série numérique $\sum f_n(a)$ converge.
A fortiori, il y a aussi convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
Montrons qu'il n'y a cependant par convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.
Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, la fonction somme de la série $\sum f_n$ serait continue car chaque f_n est continue. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Par positivité des fonctions sommées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) \geqslant f_N\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

et donc la fonction somme ne tend par vers 0 en 0.
Ceci contredit sa continuité.

a) Pour $x \in]0,1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.
b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x\right| \leqslant x^{2(n+2)} |\ln x|$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0,1], x^{2(n+2)} |\ln x| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0,1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

a) Soit $x \in [0\,;+\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b) On a

$$\sup_{x \in [a;+\infty[} |u_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc $0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

or $u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \geqslant 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geqslant 0$ et

$$u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leqslant \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Récurrence établie.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.
c) Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u. On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0, 1]\,, \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^x u(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand. Par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On a

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u(1-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \not\to \int_0^1 0\,\mathrm{d}t.$$

(c) Pour n assez grand, $\sup_{[a;1]}\left|f_n(x)\right| = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a\,;1]$.