

**Question de cours**

Définition de la covariance et du coefficient de corrélation.

**Exercice**

Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend comme valeurs 1 et  $-1$  avec les probabilités  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{4}$  et la valeur 0 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . On pose  $Y = X^2$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  sont non corrélées et ne sont pas indépendantes.

**Exercice**

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. On tire successivement et sans remise les boules d'une urne constituée de  $n$  boules dont 2 sont noires et les autres blanches. On note  $X$  le rang du tirage de la première boule noire et  $Y$  celui du tirage de la seconde boule noire.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Donner les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
3. Montrer qu'il existe un entier  $a$  tel que  $a - X$  ait la même loi que  $Y$ .
4. Déterminer la loi de  $Y - X$ .
5. En déduire l'espérance des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

**Question de cours**

Définition des lois marginales, lien avec l'indépendance ?

**Exercice**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire deux boules successivement et avec remise. On note  $X$  le premier numéro tiré et  $Y$  le second. On note  $U = \max(X, Y)$  et  $V = \min(X, Y)$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Calculer  $E(U)$ .
3. En déduire  $E(V)$ .

**Exercice**

Un cirque s'installe dans une ville de  $n$  habitants ( $n$  entier supérieur à 2). Chaque soir, toute personne n'ayant pas encore vu le spectacle a une probabilité  $p$  de s'y rendre (avec  $p$  élément de  $]0, 1[$  fixé). Les personnes vont voir au plus une fois le spectacle. Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $X_k$  le nombre de spectateurs de la  $k$ -ième représentation.

1. Quelle est la loi de  $X_1$  ?
2. Quelle est la loi du couple  $(X_1, X_2)$  ?
3. Quelle est la loi de  $X_2$  ? Reconnaître une loi usuelle.
4. Quelle est la loi de  $X_1 + X_2$  ? Reconnaître une loi usuelle.
5. Quelle est la loi de  $X_1 + \dots + X_k$  ?

## BL2 Sujet 3

Semaine de colle: 4

Autres sujets posés sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Variance d'une somme...

#### Exercice

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles dont la loi conjointe est donnée par le tableau des  $P((X, Y) = (x, y))$  suivant :

$x \backslash y$	-2	-1	0	2
-1	0,1	0	0,1	0,25
1	0	0,1	0	0,2
2	0	0,1	0,15	0

Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$  et  $Cov(X, Y)$ .

#### Exercice

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire  $Z$  telle que :

$$Z(\Omega) = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 / 1 \leq i \leq n \text{ et } i \leq j \leq i + n \}$$

et, pour tout  $(i, j)$  de  $Z(\Omega)$ , on a :  $P(Z = (i, j)) = \frac{1}{n^2}$ .

1. Représenter  $Z(\Omega)$  et montrer qu'on décrit une loi de probabilité pour  $Z$ .
2. Déterminer les lois marginales de  $Z$ . Sont-elles indépendantes ?