Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer correctement le théorème de convergence dominée puis celui de continuité des intégrales à paramètres.

Exercice 1

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_1^{+\infty}\exp(-x^n)dx\right)=\int_1^{+\infty}\frac{\exp(-x)}{x}dx.$$

Exercice 2

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{e^t-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 6

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Énoncer correctement le théorème d'intégration terme à terme (cas positif puis général)

Exercice 1

Soit $f_n : x \to \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$ et $u_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ pour tout entier naturel n non nul. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et converge vers une limite à préciser.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^n dx$ (avec n entier naturel) et en déduire que :

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 6

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer correctement le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Exercice 1

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f tend vers L en $+\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(x)dx\right)$.

Exercice 2

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx^2)}{1+t^3}dt$.

1. Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.
2. Étudier les variations de g sur son domaine de définition.
3. Étudier la limite de g en $+\infty$.