Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$ est définie et continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. Etant de plus négligeable devant $1/x^2$ quand $x \to +\infty$, on peut affirmer qu'elle est intégrable et on peut donc introduire

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donné par la relation $t = x^n$, on obtient

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t$$

Posons alors

$$f_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1,+\infty[$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

f_n est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \to \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.
Quand $x \to +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Par suite f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = nf_n(x)$$

Pour $x > 0$, quand $n \to +\infty$, $g_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$.
De plus, sachant $\ln(1+u) \leqslant u$, on a $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.
Par convergence dominée,

$$u_n \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns)\,\mathrm{d}s$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \to \ell$$

Pour $t > 0$, on peut écrire

$$\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}$$

La fonction $t \mapsto \sin t.\mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |\sin t|\, \mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente donc par le théorème de Fubini d'intégration terme à terme $t \mapsto \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n+i)t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+1}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 33 : [énoncé]

Les intégrales considérées sont bien définies.

Par intégration par parties,

$$I_n(m) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m\right]_0^1 - \frac{m}{n+1} I_n(m-1)$$

Ainsi

$$I_n(m) = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}} m!$$

En particulier

$$I_n(n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$$

b) $x^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x \ln x)^n$.

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_n(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $g(0)$ existe.
$u \mapsto 1/u$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.
On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$$

Donc

$$2g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$g(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) La fonction g est paire. Pour $0 \leqslant x \leqslant x'$, on a pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-tx^2} \geqslant \mathrm{e}^{-tx'^2}$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
c) Pour $x > 0$,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \to 0$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.