Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E représenté par la matrice A dans $\mathcal{B}$. On a $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Notons que cela entraîne $\dim \mathrm{Im} u = 1$ et $\dim \ker u = 2$.
Cherchons une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = B$. Après analyse du problème : Considérons $\varepsilon_1 \notin \ker(u)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. ε_2 est un vecteur non nul de $\ker u$ qui peut être complétée en une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\ker u$. Formons $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Si $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 = 0$ alors en appliquant u, $\lambda_1 u(\varepsilon_1) = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 = 0$ entraîne $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puisque $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre. Finalement la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc bien une base de E. La matrice de u dans cette base est bien la matrice B. On peut conclure.

(a) $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$ avec $D(a,b) = \mathrm{diag}((a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^2-b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $M(a,b)^n \to 0$ si, et seulement si, $|a+b| < 1$, $|a-b| < 1$ et $\left|a^2 - b^2\right| < 1$.
Or $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.
L'étude graphique est alors simple.

Exercice 2 : [énoncé]
Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \mathrm{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.
Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors $3 = \dim E$valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

On a

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

et puisque

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A a donc, d'après l'énoncé, trois vecteurs propres formant une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ (car famille libre de 3 éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$) et est de taille 3, elle est donc diagonalisable.

Appelons λ_1 la valeur propre associée à X, λ_2 la valeur propre associée à Y et λ_3 la valeur propre associée à Z.

On a donc : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Développons tout ça, on obtient que :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 & \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Or on sait que A est $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix}$. En utilisant la première colonne, on peut donc affirmer que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2 = 3$$

ce qui donne : $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Terminons le travail :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

1. (a) On calcule J^2 puis J^3, on obtient que : $J^3 = I_3$.

   (b) On résout l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe. En utilisant les notions de racines $n^{ième}$, on obtient que 1, j (en posant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) et j^2 sont les solutions de cette équation. On refait la démo de la méthode sur les polynômes annulateurs pour démontrer que les trois valeurs propres possibles de J sont donc 1, j et j^2.

   (c) Pour montrer que 1, j et j^2 sont bien les valeurs propres de J (ce qu'on ne sait pas encore, on vous rappelle qu'un nombre peut être une racine d'un polynôme annulateur d'une matrice sans en être une valeur propre), on introduit, comme d'hab, pour λ valant 1, j ou j^2, ce système : (S_λ) : $J \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

   Bref, calcul habituel.... Puisque $j^3 = 1$, on obtient que :

   $$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, J \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \text{ et } J \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

   Ceci prouve que 1, j et j^2 sont bien des valeurs propres de J... et même les valeurs propres de J (car un nombre ne peut pas être une valeur propre d'une matrice si elle n'est pas racine d'un polynôme annulateur de cette matrice).

2. (a) No problemo : $M = aI_3 + bJ + cJ^2$.

   (b) On sait que $J = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$. Cela donne : $J^2 = PD^2P^{-1}$ et donc :

   $$M = aI_3 + bJ + cJ^2 = aPI_3P^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$$

   Or, $aI_3 + bD + cD^2$ est $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a + jb + j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a + j^2b + jc \end{pmatrix}$. Elle est donc diagonale et M est donc diagonalisable...

   (c) ... et les valeurs propres de M sont donc $a + b + c$, $a + jb + j^2c$ et $a + j^2b + jc$.

---

1. A est de rang 2 donc $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n-2$ (On rappelle que n est supérieur à 3...). Mis à part la première, les colonnes de A sont les mêmes. On en déduit une famille d' éléments du noyau :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Cette famille est même une base du noyau car c'est une famille libre (à prouver) de $\mathrm{Ker}(f)$ ayant $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ éléments.

Pour l'image, il suffit de regarder deux secondes la matrice ! $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par (e_1, e_2) en posant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Déjà 0 est valeur propre de f et $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace propre associé.

Il ne reste au maximum deux valeurs propres à trouver (☞ astuces).

Supposons que λ soit une valeur propre non nulle de f et x un vecteur propre associé à λ.

Ecrire $f(x) = \lambda x$ implique que x est dans $\mathrm{Im}(f)$ (puisque λ est non nul). On peut donc écrire x sous la forme $ae_1 + be_2$.

$f(x) = \lambda x$ nous donne alors $A \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On développe, on obtient : $b + na = \lambda(a+b)$ et $b + a = \lambda a$. On en déduit que $b = a(\lambda - 1)$ et $a(n - 1 + \lambda - \lambda^2) = 0$.

On ne veut pas $a = b = 0$ (car x n'est pas le vecteur nul), on trouve donc que $n - 1 + \lambda - \lambda^2 = 0$ soit $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$ (On rerappelle que n est supérieur à 3...). Le sous-espace associé à $\dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ est engendré par $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous-espace associé à $\dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$ est engendré par $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : [énoncé]

a) Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B)\det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice $A + \frac{1}{p}I_n$ n'est pas inversible seulement si $-1/p$ est valeur propre de A. Puisque la matrice A ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour p assez grand on est sûr que $A + \frac{1}{p}I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Comme vu ci-dessus, pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.
Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{C}$, les polynômes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Le polynôme caractéristique de f est un polynôme de degré n annulant f.
Ainsi $f^n \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $m \geqslant n$, $f^m \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.
Par suite $f^n(x), \ldots, f^{N-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ puis
$E = \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{N-1}(x))$ donne $E = \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$. La famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est alors génératrice et formée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.
b) Les polynômes en f commute avec f.
Inversement, supposons que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f. Puisque $g(x) \in E$, on peut écrire $g(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x)$.
Puisque f et g commute, on a encore
$g(f^k(x)) = a_0 f^k(x) + a_1 f^{k+1}(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n+k-1}(x)$ de sorte que les endomorphismes g et $a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$ coïncident sur une base de E et c'est donc égaux. Au final f est un polynôme en f.