BCPST1 **Sujet 1** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 5 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Rappeler la définition de l'injectivité d'une application. Donner sa caractérisation pratique et la démarche à suivre pour l'établir.

Exercice 1

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x},\ g : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\ln(x)+1 & \text{si } x > 0 \end{cases},\ h : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}.$$

Exercice 2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto |3x-1|+4 \end{cases}$

1. Est-ce que l'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner une restriction de f bijective et déterminer sa réciproque.

BCPST1 **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 5 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Rappeler la définition de la surjectivité d'une application. Donner sa caractérisation pratique et la démarche à suivre pour l'établir.

Exercice 1

Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$x \mapsto \cos(\tan(x)) - 1 \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln(\cos(x))$$

Exercice 2

Soit f une fonction numérique telle que, pour tout x réel, sous réserve d'existence, on ait :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \to \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée, f_0 soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

BCPST1 **Sujet 3** — Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 5 — cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définir l'application réciproque d'une bijection. En pratique, comment détermine-t-on son expression ?

Exercice 1

Étudier la dérivabilité en 1 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto |x^2 + 2x - 3|,\ \ g : x \longmapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ x\ln(x) + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases},\ \ h : x \mapsto |x-1|\sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 2

Soients E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. (a) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
   (b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. On considère désormais les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto n+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

   (a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.

   (b) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis conclure.