BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Donner et justifier les formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe non nul. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.

Exercice 1

Calculer $(1+i)^{25}$ et donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$(2-5i)(3+i),\ \frac{1}{i} \text{ et } \frac{(3+2i)(1+i)}{i-1}.$$

Exercice 2

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $z^3 - 1$ sous forme d'un produit de deux facteurs.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe.
3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ si et seulement si $\dfrac{z}{1+i\sqrt{2}}$ est solution de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe.
   (b) En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ d'inconnue z complexe.
4. De même, donner les solutions des équations $z^3 = 5 - i\sqrt{2}$ et $z^3 = 5 + i\sqrt{2}$ d'inconnue z complexe.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Question de cours

Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice 1

Calculer $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{32}$ et donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$(2-5i)(3+7i),\ \frac{1}{1+i} \text{ et } \frac{(3+2i)(1+i)}{i-1}.$$

Exercice 2

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(\theta)$ puis exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$.
   (a) Déterminer les variations de f sur $[-1, 1]$.
   (b) Soit z un nombre complexe de module 1 et θ un de ses arguments. Établir :
   $$\left|z^3 - z + 2\right|^2 = 4f(\cos(\theta))$$
3. En déduire que, pour tout complexe z de module 1, on a : $|z^3 - z + 2| \leqslant \sqrt{13}$.
4. Préciser les complexes z de module 1 vérifiant $|z^3 - z + 2| = \sqrt{13}$.

BCPST1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels. Résultat et démonstration.

Exercice 1

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, z_2 = 1 - i \text{ et } z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

Mettre sous forme trigonométrique ces trois complexes puis donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Soient n un entier naturel et a un réel non nul. Trouver les complexes z tels que :

$$z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0.$$