MP **Sujet 1** | Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 9 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Pas de question de cours afin de terminer les deux exos!!!

Exercice 1

Soient E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et Δ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Delta : u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Vérifier que E est un espace vectoriel et que Δ est un endomorphisme de E.
2. Expliciter le spectre de Δ.
3. Δ est-il injectif ?

Exercice 2

Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec n un entier naturel non nul. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

1. Établir l'égalité quand $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. Pour $A \notin GL_n(\mathbb{C})$, justifier que $A+\frac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ pour p entier naturel assez grand.
3. En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

Question de cours

Pas de question de cours afin de terminer les deux exos!!!

Exercice 1

Soient a et b deux réels, on pose :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M(a,b) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en déduire une première valeur propre de $M(a,b)$.
2. Calculer de même les autres valeurs propres de cette matrice.
3. Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables ?
4. Étudier et représenter graphiquement l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(M(a,b))^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^4 = f^2.$$

On suppose que 1 et -1 sont des valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

MP **Sujet 3** — Semaine de colle: 9

Corrigé dès mercredi sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Pas de question de cours afin de terminer les deux exos!!!

Exercice 1

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer J^3.

   (b) En déduire que J est diagonalisable.

2. Soient a, b et c trois complexes. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que M est diagonalisable.

   (b) Donner les valeurs propres de M.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On suppose qu'il existe $x \in E$ et $N \in \mathbb{N}^\star$ tels que $(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x))$ soit une famille génératrice de E.

1. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

2. Démontrer que les endomorphismes commutant avec f sont les polynômes en f.