

a) Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $\lambda^p = 0$  d'où  $\lambda = 0$ . Par suite  $\chi_A = (-1)^n X^n$

puis par Cayley Hamilton  $A^n = 0$ .

b)  $\det(A + I) = \chi_A(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1$

c) Si  $M$  est inversible  $\det(A + M) = \det(AM^{-1} + I) \det M$ .

Or  $A$  et  $M^{-1}$  commutent donc  $(AM^{-1})^p = 0$  puis par b) :  $\det(A + M) = \det M$ .

Si  $M$  n'est pas inversible. Posons  $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$ . Quand  $p \rightarrow +\infty$ ,  $M_p$  est

inversible et commute avec  $A$  donc  $\det(A + M_p) = \det M_p$ . Or  $\det M_p \rightarrow \det M$  et

$\det(A + M_p) \rightarrow \det(A + M)$  donc on peut prolonger l'égalité à toute matrice qui commute avec  $A$ .

d) Non prendre :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

On a

$$\det(A + N) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}N)$$

Puisque  $A$  et  $N$  commutent, il en est de même de  $A^{-1}$  et  $N$ . On en déduit que la matrice  $A^{-1}N$  est nilpotente car  $N$  l'est.

La matrice  $A^{-1}N$  est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et la matrice  $I_n + A^{-1}N$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

On en déduit

$$\det(I_n + A^{-1}N) = 1$$

puis

$$\det(A + N) = \det A$$

Si la matrice  $A$  est nilpotente alors elle est annihilée par un polynôme  $X^m$  et donc

$$\text{Sp}A \subset \{0\}$$

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la matrice  $A$  est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

De la même façon, les matrices  $A^p$  sont aussi semblables à des matrices triangulaires supérieures strictes et donc

$$\forall p \in [1, n], \text{tr}A^p = 0$$

Inversement, supposons  $\text{tr}A^p = 0$  pour tout  $p \in [1, n]$ .

Nous allons montrer que seule 0 est valeur propre de  $A$ . On pourra alors par trigonalisation affirmer que la matrice  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire supérieure stricte  $T$  et puisque  $T^m = O_n$  on aura aussi  $A^m = O_n$  ce qui conclut.

Par l'absurde supposons donc que la matrice  $A$  ait au moins une valeur propre non nulle.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres non nulles de la matrice  $A$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  leurs multiplicités respectives.

En procédant encore à une trigonalisation de la matrice  $A$ , on peut affirmer

$$\forall 1 \leq p \leq n, \text{tr}(A^p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^p = 0$$

On ne retient que les  $m$  premières équations pour exprimer le système

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0 \\ \lambda_1^2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m^2 \alpha_m = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^m \alpha_1 + \lambda_2^m \alpha_2 + \dots + \lambda_m^m \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Ce système peut se percevoir sous la forme matricielle  $VX = 0$  avec

$X = {}^t(\alpha_1 \dots \alpha_m)$  et

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_m^m \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice  $V$  se calcule par déterminant de Vandermonde et est non nul car  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$ . On en déduit

$$\forall 1 \leq i \leq m, \alpha_i = 0$$

ce qui est absurde car les  $\alpha_i$  étaient des multiplicités de véritables valeurs propres

## Exercice 2 : [\[énoncé\]](#)

Si 1 et  $-1$  sont les seules valeurs propres alors  $f \in \text{GL}(E)$  et la relation  $f^4 = f^2$  donne  $f^2 = \text{Id}$  ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.

Si 1 et  $-1$  ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur.  $f$  présente alors 3 =  $\dim E$  valeurs propres distincts donc  $f$  est diagonalisable.

On a

$$E_1(A) = \text{Vect} \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

et puisque

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a  $A = PTP^{-1}$  avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3 :** [\[énoncé\]](#)

a) Pour  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B) \det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice  $A + \frac{1}{p}I_n$  n'est pas inversible seulement si  $-1/p$  est valeur propre de  $A$ . Puisque la matrice  $A$  ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour  $p$  assez grand on est sûr que  $A + \frac{1}{p}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Comme vu ci-dessus, pour  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ .

Ceci valant pour tout  $x \in \mathbb{C}$ , les polynômes  $\chi_{AB}$  et  $\chi_{BA}$  sont égaux.