

**Question de cours**

Donner le développement limité d'ordre  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \exp(x), x \mapsto \frac{1}{1-x} \text{ et } x \mapsto \ln(1+x).$$

**Exercice**

1. Utiliser les développements limités pour donner l'équation de l'asymptote ainsi que la position par rapport à la courbe avec la fonction  $f$  suivante :  $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .
2. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$  par  $X^2 + 3X - 1$ .

**Exercice**

1. Trouver  $Q$  un polynôme de  $\mathbb{R}[x]$  tel que, pour tout complexe non nul  $z$ , on ait  $Q\left(z + \frac{1}{z}\right) = P(z)$  avec  $P(X) = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 5X + 2$ .
2. En déduire la factorisation de  $P(X)$ .

**Question de cours**

Donner le développement limité d'ordre  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \cos(x), x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ et } x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

**Exercice**

1. Utiliser les développements limités pour donner l'équation de l'asymptote ainsi que la position par rapport à la courbe avec la fonction  $f$  suivante :

$$x \mapsto \frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1}.$$

2. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$  par  $X^2 + 3X - 1$ .

**Exercice**

On définit une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes (ce sont les polynômes de Tchebychev) en posant pour tout réel  $x$  :

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \text{ et } T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Expliciter  $T_5$ .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $T_n$ .
3. Montrer que pour tout réel  $\theta$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .
4. Résoudre l'équation  $\cos(n\theta) = 0$  d'inconnue  $\theta$  réel.
5. En déduire toutes les racines de  $T_n$  puis factoriser  $T_n$ .
6. Factoriser  $T'_n$ .

**Question de cours**

Donner le développement limité d'ordre  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) au voisinage de 0 des fonctions suivantes :  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \exp(x)$  et  $x \mapsto \ln(1 - x)$ .

**Exercice**

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .
2. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^5 - X^2 + 1$  par  $X^2 + 1$ .

**Exercice**

Soit  $f : x \mapsto (x - 2) \exp\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les équations de ses asymptotes.
4. Déterminer la position de la courbe représentative de  $f$  par rapport à ses asymptotes.
5. Soit  $g : h \mapsto hf\left(\frac{1}{h}\right)$ . Donner le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de  $g$ .
6. En déduire de nouveau l'asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de  $f$  et leurs positions relatives.