BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Monotonie et composition (la composée de deux fonctions croissantes, ...)

Exercice 1

Ensemble de définition et parité/imparité/périodicité de :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}, x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}} \text{ et } x \mapsto \frac{\exp(\sin(x))-1}{\exp(\sin(x))+1}.$$

Exercice 2

On note (E) l'équation $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ d'inconnue z complexe.

1. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que :
$$1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{z^5-1}{z-1}.$$
2. En déduire que $\exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$ est solution de (E).
3. Soit z une solution de (E). Montrer que, si on pose $x=z+\frac{1}{z}$, alors x est racine d'un polynôme du second degré que l'on explicitera.
4. En déduire une expression explicite de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. En s'inspirant de la méthode précédente, donner également une expression explicite de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

BCPST1 **Sujet 2** — Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Symétrie des courbes des fonctions impaires : énoncé et démonstration du résultat.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto x^2 - 5x + 4$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.
2. En déduire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto f(x) - 5,\ \ h : x \mapsto f(x-5),\ \ i : x \mapsto |f(x)| \quad \text{et} \quad j : x \mapsto f(|x|)$$

Exercice 2

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $z^3 - 1$ sous forme d'un produit de deux facteurs.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe.
3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ si et seulement si $\dfrac{z}{1+i\sqrt{2}}$ est solution de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe.
   (b) En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ d'inconnue z complexe.
4. De même, donner les solutions des équations $z^3 = 5 - i\sqrt{2}$ et $z^3 = 5 + i\sqrt{2}$ d'inconnue z complexe.

BCPST1 **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 7 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Rappeler et prouver le lien entre la courbe de f et celle de la fonction $g; x \mapsto f(x-a)+b$.

Exercice 1

Ensemble de définition et parité/imparité/périodicité de :

$$x \mapsto \sqrt{1-2x^2+x^4}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2+\cos(x^7)}} \text{ et } x \mapsto \frac{\exp(x^3)-1}{\exp(x^3)+1}.$$

Exercice 2

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence de $z = \dfrac{1}{1+\dfrac{e^{ix}}{2}}$ puis déterminer ses parties réelles et imaginaires.
2. On définit la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} e^{ikx} = 1 - \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{2ix}}{2^2} - \frac{e^{3ix}}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{e^{inx}}{2^n}$.
   Justifier l'égalité $z = S_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \times \dfrac{e^{i(n+1)x}}{1+\dfrac{e^{ix}}{2}}$.
3. En déduire les deux égalités :
$$\frac{4+2\cos(x)}{5+4\cos(x)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \cos(kx)\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \times \frac{2\cos((n+1)x)+\cos(nx)}{5+4\cos(x)}$$
$$\frac{2\sin(x)}{5+4\cos(x)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \sin(kx)\right) + \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{2\sin((n+1)x)+\sin(nx)}{5+4\cos(x)}.$$
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \cos(kx)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \sin(kx)\right)$.