MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 10

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Trigonalisation de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. A est-elle trigonalisable ?
3. Trigonaliser A.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul, $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto ||x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n||_\infty \end{cases}$$

A quelle condition, sur les $f_1, \cdots, f$, cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 10 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Calcul de la dimension d'un sous-espace caractéristique.

Exercice 1

Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trigonaliser A.
2. On appelle f l'application de $\mathbb{R}^3$ dont B est la matrice canoniquement associée. On pose : $g = f - 2\mathrm{Id}$ et on appelle C la matrice canoniquement associée de g.
   (a) Montrer que f est trigonalisable et n'est pas diagonalisable.
   (b) Trouver une matrice triangulaire semblable à C.
   (c) Trigonaliser B.
   (d) Calculer B^n avec n entier naturel.

Exercice 2

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note :

$$B_1 = \{x \in E \text{ tel que } N_1(x) \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{x \in E \text{ tel que } N_2(x) \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.
2. Même question avec les boules unités ouvertes.

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 10

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer qu'il existe une base de la forme $(x, f(x), \cdots, f^{n-1)}(x))$ avec f un endomorphisme nilpotent de E, espace de dimension n, n entier naturel non nul.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul et soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB - BA = A.$$

Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $f : M \mapsto MB - BM$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a :

$$A^k B - BA^k = kA^k.$$

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que si $A^k \neq 0$ (avec k entier naturel) alors k est une valeur propre de f.
4. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 2

On appelle E l'ensemble $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et on pose $N_1 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt \end{cases}$ ainsi que :

$$N_2 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \left(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad N_\infty = \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \sup(\{|f(t)|, t \in [0,1]\}) \end{cases}.$$

1. Montrer que ce sont des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ est plus fine que N_1 et N_2 mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.
3. Comparer N_1 et N_2.