1. On vérifie facilement que $C_A(X) = (X-2)^3$. Il est scindé, donc f est trigonalisable.

2. D'après la question précédente, 2 est la seule valeur propre de f (de A). Si f (ou A) était diagonalisable, A serait semblable à $2I_3$: il existerait $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P(2I_3)P^{-1}$ ce qui entraîne $A = 2I_3$, ce qui n'est pas le cas!

3.

3.1. On trouve $B^2 = 0$.

3.2. Soit $u = (x, y, z)$. Alors $g(u) = 0$ si et seulement si

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + y &= 0 \\ -4x + 2y &= 0 \\ -2x + y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= 2x \\ z &= z \end{cases}$$

Posons $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = e_3$. Alors (u_1, u_2) est une base de $\ker(g)$. Pour prouver que $\ker(g)$ et $\mathrm{vect}(e_2)$ sont supplémentaires, il suffit de vérifier que la famille (u_1, u_2, e_2) est libre, ce qui est évident!

3.3. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, e_2)$ qui est une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque $u_1, u_2 \in \ker g$ et que $g(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 = u_1 + u_3$, la matrice de g dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4. La matrice de f dans la base précédente est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Écrivons $A = 2I_3 + B$. Puisque I_3 et B commutent pour le produit matriciel, on peut appliquer la formule du binôme de Newton. Ici, elle se simplifie grandement parce que $B^2 = 0$. On a donc, utilisant $I_3^n = I_3$ et $I_3 B = B$,

$$A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B.$$

Après calculs, on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} (1-n)2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

1. On va procéder par récurrence sur k. La propriété est vraie si $k=0$ ou si $k=1$. Soit un entier $k\geq 1$ tel que la propriété est vraie. Multiplions alors cette égalité à gauche par A. On trouve

$$A^{k+1}B-ABA^k=kA^{k+1}.$$

De même, multiplions à droite par A^k l'égalité $AB-BA=A$. Il vient :

$$ABA^k-BA^{k+1}=A^{k+1}.$$

Si on somme les deux inégalités obtenues, on obtient immédiatement que la propriété est aussi vraie au rang $k+1$.

2. La vérification est immédiate et laissée au lecteur.

3. Il suffit de remarquer que le résultat de la question 1. entraîne que A^k est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre k.

4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2, ϕ_B admet au plus un nombre fini de valeurs propres distinctes. Or, si $A^k\neq 0$, k est une valeur propre de ϕ_B. Il existe donc un nombre fini d'entiers k tels que $A^k\neq 0$. En particulier, il existe au moins un entier k avec $A^k=0$.

a) Si λ est valeur propre de A alors $\lambda^p = 0$ d'où $\lambda = 0$. Par suite $\chi_A = (-1)^n X^n$ puis par Cayley Hamilton $A^n = 0$.
b) $\det(A+I) = \chi_A(-1) = (-1)^n(-1)^n = 1$
c) Si M est inversible $\det(A+M) = \det(AM^{-1}+I)\det M$.
Or A et M^{-1} commutent donc $(AM^{-1})^p = 0$ puis par b) : $\det(A+M) = \det M$.
Si M n'est pas inversible. Posons $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$. Quand $p \to +\infty$, M_p est inversible et commute avec A donc $\det(A+M_p) = \det M_p$. Or $\det M_p \to \det M$ et $\det(A+M_p) \to \det(A+M)$ donc on peut prolonger l'égalité à toute matrice qui commute avec A.
d) Non prendre : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On a

$$\det(A+N) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}N)$$

Puisque A et N commutent, il en est de même de A^{-1} et N. On en déduit que la matrice $A^{-1}N$ est nilpotente car N l'est.
La matrice $A^{-1}N$ est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et la matrice $I_n + A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.
On en déduit

$$\det(I_n + A^{-1}N) = 1$$

puis

$$\det(A+N) = \det A$$

Si la matrice A est nilpotente alors elle est annulée par un polynôme X^m et donc

$$\mathrm{Sp}A \subset \{0\}$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

De la même façon, les matrices A^p sont aussi semblables à des matrices triangulaires supérieures strictes et donc

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{tr}A^p = 0$$

Inversement, supposons $\mathrm{tr}A^p = 0$ pour tout $p \in [\![1,n]\!]$.
Nous allons montrer que seule 0 est valeur propre de A. On pourra alors par trigonalisation affirmer que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure stricte T et puisque $T^n = O_n$ on aura aussi $A^n = O_n$ ce qui conclut.
Par l'absurde supposons donc que la matrice A ait au moins une valeur propre non nulle.
Notons $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres non nulles de la matrice A et $\alpha_1, ..., \alpha_m$ leurs multiplicités respectives.
En procédant encore à une trigonalisation de la matrice A, on peut affirmer

$$\forall 1 \leqslant p \leqslant n, \mathrm{tr}(A^p) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^p = 0$$

On ne retient que les m premières équations pour exprimer le système

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0 \\ \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m^2\alpha_m = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1^m\alpha_1 + \lambda_2^m\alpha_2 + \cdots + \lambda_m^m\alpha_m = 0 \end{cases}$$

Ce système peut se percevoir sous la forme matricielle $VX = 0$ avec $X = {}^t(\alpha_1 \ldots \alpha_m)$ et

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \cdots & \lambda_m^m \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice V se calcule par déterminant de Vandermonde et est non nul car $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \neq 0$. On en déduit

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant m, \alpha_i = 0$$

ce qui est absurde car les α_i étaient des multiplicités de véritables valeurs propres

Exercice 2 : [énoncé]
Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \mathrm{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.
Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors $3 = \dim E$valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

On a

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

et puisque

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B) \det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice $A + \frac{1}{p} I_n$ n'est pas inversible seulement si $-1/p$ est valeur propre de A. Puisque la matrice A ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour p assez grand on est sûr que $A + \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Comme vu ci-dessus, pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.
Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{C}$, les polynômes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.