BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Donner son tableau de variation.

Exercice 1

1. On tire 3 cartes d'un jeu de belote (32 cartes), quelle est la probabilité de tirer uniquement des coeurs ? uniquement des As ?
2. Est il plus probable d'obtenir un 6 en 4 lancés de dé ou un double 6 en 24 lancés de deux dés ?

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.

Pour tout entier naturel n non nul on note B_n l'événement « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches», et on note $u_n = P(B_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$

2. Étudier les variations de la suite (u_n), puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que pour tout réel x positif, on a : $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, puis démontrer que la suite $\big(-\ln(u_n)\big)$ est convergente.
4. En déduire que $\ell > 0$.
5. Que peut-on en déduire sur la probabilité de l'évènement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, et si a et b sont deux réels, rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire $aX + b$.

Exercice 1

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. Pour tout entier naturel non nul n, on note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit n un entier naturel non nul. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Exercice 2

n (n entier naturel non nul) couples hétérosexuels mariés viennent à une soirée. La musique démarre. À cet instant précis, chaque femme choisit au hasard un partenaire masculin. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on appelle F_i l'événement "la i-ième femme danse avec son mari".

1. Expliciter $P(F_1)$.
2. Expliciter $P(F_1 \cap F_2)$.
3. En déduire enfin que $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ en notant p_n la probabilité qu'un couple légitime danse.
4. Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+$?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Loi géométrique : loi ? Espérance ? Variance ? Situation modélisée ?

Exercice 1

On place les entiers strictement positifs dans un sac et on en tire un au hasard. On sait que la probabilité de tirer l'entier naturel non nul n est $\frac{1}{2^n}$. Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement "le nombre tiré est un multiple de k".

1. Vérifier que l'on a bien défini une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.

Exercice 2

1. Jean-Christophe décide enfin d'arrêter de fumer. On estime les probabilités suivantes :
   (a) Si Jean-Christophe n'a pas fumé un jour alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est $0,3$.
   (b) Si Jean-Christophe fume un jour alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est $0,9$.

   Va-t-il finir par s'arrêter ?
2. Soient b et r deux entiers naturels non nuls. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n (n entier naturel) fois une boule avec remise et on note P_n la probabilité pour que le nombre de boules rouges soit pair.
   (a) Soit n un entier naturel non nul, montrer que : $P_n = \frac{b-r}{b+r} P_{n-1} + \frac{r}{b+r}$.
   (b) Expliciter $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Calculer la limite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et commenter.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice 1

1. On tire 3 cartes d'un jeu de belote (32 cartes), quelle est la probabilité de tirer uniquement des coeurs ? uniquement des As ?
2. Est il plus probable d'obtenir un 6 en 4 lancés de dé ou un double 6 en 24 lancés de deux dés ?

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.
Pour tout entier naturel n non nul on note B_n l'événement « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches», et on note $u_n = P(B_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul :
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$
2. Étudier les variations de la suite (u_n), puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que pour tout réel x positif, on a : $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, puis démontrer que la suite $\big(-\ln(u_n)\big)$ est convergente.
4. En déduire que $\ell > 0$.
5. Que peut-on en déduire sur la probabilité de l'évènement $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète.

Exercice 1

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. Pour tout entier naturel non nul n, on note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit n un entier naturel non nul. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Exercice 2

n (n entier naturel non nul) couples hétérosexuels mariés viennent à une soirée. La musique démarre. À cet instant précis, chaque femme choisit au hasard un partenaire masculin. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on appelle F_i l'événement "la i-ième femme danse avec son mari".

1. Expliciter $P(F_1)$.
2. Expliciter $P(F_1 \cap F_2)$.
3. En déduire enfin que $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ en notant p_n la probabilité qu'un couple légitime danse.
4. Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+$?

BCPST2 **Sujet 3** — Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 — https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Loi binomiale : loi ? Espérance ? Variance ? Situation modélisée ?

Exercice 1

On place les entiers strictement positifs dans un sac et on en tire un au hasard. On sait que la probabilité de tirer l'entier naturel non nul n est $\frac{1}{2^n}$. Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement "le nombre tiré est un multiple de k".

1. Vérifier que l'on a bien défini une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.

Exercice 2

1. Jean-Christophe décide enfin d'arrêter de fumer. On estime les probabilités suivantes :
   (a) Si Jean-Christophe n'a pas fumé un jour alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est $0,3$.
   (b) Si Jean-Christophe fume un jour alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est $0,9$.

   Va-t-il finir par s'arrêter ?
2. Soient b et r deux entiers naturels non nuls. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n (n entier naturel) fois une boule avec remise et on note P_n la probabilité pour que le nombre de boules rouges soit pair.
   (a) Soit n un entier naturel non nul, montrer que : $P_n = \frac{b-r}{b+r}P_{n-1} + \frac{r}{b+r}$.
   (b) Expliciter $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Calculer la limite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et commenter.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice 1

1. On tire 3 cartes d'un jeu de belote (32 cartes), quelle est la probabilité de tirer uniquement des coeurs ? uniquement des As ?
2. Est il plus probable d'obtenir un 6 en 4 lancés de dé ou un double 6 en 24 lancés de deux dés ?

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.
Pour tout entier naturel n non nul on note B_n l'événement « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches», et on note $u_n = P(B_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul :
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$
2. Étudier les variations de la suite (u_n), puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que pour tout réel x positif, on a : $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, puis démontrer que la suite $\big(-\ln(u_n)\big)$ est convergente.
4. En déduire que $\ell > 0$.
5. Que peut-on en déduire sur la probabilité de l'évènement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète.

Exercice 1

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. Pour tout entier naturel non nul n, on note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit n un entier naturel non nul. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Exercice 2

n (n entier naturel non nul) couples hétérosexuels mariés viennent à une soirée. La musique démarre. À cet instant précis, chaque femme choisit au hasard un partenaire masculin. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on appelle F_i l'événement "la i-ième femme danse avec son mari".

1. Expliciter $P(F_1)$.
2. Expliciter $P(F_1 \cap F_2)$.
3. En déduire enfin que $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ en notant p_n la probabilité qu'un couple légitime danse.
4. Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+$?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Loi binomiale : loi ? Espérance ? Variance ? Situation modélisée ?

Exercice 1

On place les entiers strictement positifs dans un sac et on en tire un au hasard. On sait que la probabilité de tirer l'entier naturel non nul n est $\frac{1}{2^n}$. Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement “le nombre tiré est un multiple de k".

1. Vérifier que l'on a bien défini une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.

Exercice 2

1. Jean-Christophe décide enfin d'arrêter de fumer. On estime les probabilités suivantes :
   (a) Si Jean-Christophe n'a pas fumé un jour alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est $0,3$.
   (b) Si Jean-Christophe fume un jour alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est $0,9$.

   Va-t-il finir par s'arrêter ?
2. Soient b et r deux entiers naturels non nuls. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n (n entier naturel) fois une boule avec remise et on note P_n la probabilité pour que le nombre de boules rouges soit pair.
   (a) Soit n un entier naturel non nul, montrer que : $P_n = \frac{b-r}{b+r}P_{n-1} + \frac{r}{b+r}$.
   (b) Expliciter $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Calculer la limite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et commenter.