# Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Loi de Bernoulli : loi ? Espérance ? Variance ? Situation modélisée ?

## Exercice 1

Soient $n$ un entier naturel et $E$ et $F$ deux ensembles. Dénombrez le nombre de surjection de $E$ vers $F$ dans les deux cas suivants *(commencez d'abord par faire pour de petites valeurs de n avant de généraliser)* :

1. $\text{Card }(E) = n+1,\ \text{Card }(F) = n$.
2. $\text{Card }(E) = n+2,\ \text{Card }(F) = n+3$.

## Exercice 2

Des boules en nombre infini numérotées 1,2,... sont placées successivement (et indépendamment les unes des autres) dans trois boîtes.

1. Pour tout entier $k$ supérieur à 2, on note $A_k$ l'événement « Deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $k$-ième boule ».
   (a) Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$.
   (b) Interprétez.
2. Pour tout entier $l$ supérieur à 3, on note $B_l$ l'événement « Les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $l$-ième boule ».
   (a) Calculer $P_{A_k}(B_l)$ pour $k \geqslant 2$ et $l \geqslant 3$.
   (b) En déduire $P(B_l)$ puis $\displaystyle\sum_{l=3}^{+\infty} P(B_l)$.
   (c) Interprétez.

Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Si $X$ est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, et si $a$ et $b$ sont deux réels, rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire $aX + b$.

## Exercice 1

1. On lance un dé cubique truqué de façon à ce que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle à son numéro. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
2. Soit $n$ un entier non nul. Déterminer une probabilité $P$ sur $[\![1, n]\!]$ telle que $P([\![1, k]\!])$ soit proportionnelle à $k^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

## Exercice 2

Deux joueurs A et B procèdent l'un après l'autre à une succession de lancers d'une même pièce, amenant pile avec la probabilité $p$ avec $p \in ]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$. Le joueur A commence et il s'arrête dès qu'il obtient le premier pile. Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A. Le joueur B gagne s'il obtient au moins un pile, sinon c'est le joueur A qui gagne. On définit, pour tout entier naturel non nul $n$, $A_n$ l'événement : " le joueur A effectue $n$ lancers" et GA (resp. GB ) l'événement : " le joueur A (resp. B ) gagne".

1. Pour tout entier naturel non nul $n$, calculer $P(A_n)$. En déduire la probabilité que le joueur A ne s'arrête jamais d'effectuer des lancers.
2. Calculer $P(GB)$ et $P(GA)$. Le jeu est-il équitable ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

# Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire $X$ discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

## Exercice 1

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments ($n$ entier naturel non nul). Soit $k$ un entier naturel.

1. Combien y-a-t-il de parties de $E$ ?
2. Combien y-a-t-il de parties de $E$ formées de $k$ éléments ?
3. Quel est le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ ?
4. Combien y a-t-il de couples $(X, Y)$ de parties de $E$ telles que $X \cap Y$ soit un singleton ?

## Exercice 2

Soit $p \in ]0; 1[$. Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Gösta Mittag-Leffler décide de jouer à un jeu de pile ou face selon la règle suivante : il effectue une succession de tirages (indépendant les uns des autres et ayant une probabilité $p$ de retourner le résultat "pile"). S'il arrive un moment où il obtient deux " pile" de plus que de "face", alors il a gagné et peut rendre visite à Mme Nobel. Si en revanche il obtient deux " face" de plus que de "pile", alors il a perdu et doit désherber son jardin.

1. Montrer que si la partie se termine alors on a effectué un nombre pair de lancers.
2. A l'instant $n$ ($n$ entier naturel non nul), on note $\Delta_n$ la différence entre le nombre de piles obtenus et le nombre de faces. Ainsi, la partie se termine dès que $(\Delta_n = \pm 2)$ a lieu. On note $A_n$ l'événement : «La partie n'est pas terminée à l'issue du lancer $n$.» Décrire l'événement $A_{2n}$ à l'aide des éléments $(\Delta_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$.
3. Pour $n$ entier naturel non nul, Déterminer $P(A_{2n})$.
4. Quelle est la probabilité que Gösta passe finalement un dimanche agréable ?

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Loi de Poisson : loi ? Espérance ? Variance ? Situation modélisée ?

## Exercice 1

Soient $n$ un entier naturel et $E$ et $F$ deux ensembles. Dénombrez le nombre de surjection de $E$ vers $F$ dans les deux cas suivants *(commencez d'abord par faire pour de petites valeurs de $n$ avant de généraliser)* :

1. $\text{Card }(E) = n+1,\ \text{Card }(F) = n.$
2. $\text{Card }(E) = n+2,\ \text{Card }(F) = n+3.$

## Exercice 2

Des boules en nombre infini numérotées 1,2,... sont placées successivement (et indépendamment les unes des autres) dans trois boîtes.

1. Pour tout entier $k$ supérieur à 2, on note $A_k$ l'événement « Deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $k$-ième boule ».
   (a) Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$.
   (b) Interprétez.
2. Pour tout entier $l$ supérieur à 3, on note $B_l$ l'événement « Les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $l$-ième boule ».
   (a) Calculer $P_{A_k}(B_l)$ pour $k \geqslant 2$ et $l \geqslant 3$.
   (b) En déduire $P(B_l)$ puis $\displaystyle\sum_{l=3}^{+\infty} P(B_l)$.
   (c) Interprétez.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète.

## Exercice 1

1. On lance un dé cubique truqué de façon à ce que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle à son numéro. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
2. Soit $n$ un entier non nul. Déterminer une probabilité $P$ sur $[\![1, n]\!]$ telle que $P([\![1, k]\!])$ soit proportionnelle à $k^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

## Exercice 2

Deux joueurs A et B procèdent l'un après l'autre à une succession de lancers d'une même pièce, amenant pile avec la probabilité $p$ avec $p \in ]0;1[$. On pose $q = 1 - p$. Le joueur A commence et il s'arrête dès qu'il obtient le premier pile. Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A. Le joueur B gagne s'il obtient au moins un pile, sinon c'est le joueur A qui gagne. On définit, pour tout entier naturel non nul $n$, $A_n$ l'événement : " le joueur A effectue $n$ lancers" et GA (resp. GB ) l'événement : " le joueur A (resp. B ) gagne".

1. Pour tout entier naturel non nul $n$, calculer $P(A_n)$. En déduire la probabilité que le joueur A ne s'arrête jamais d'effectuer des lancers.
2. Calculer $P(GB)$ et $P(GA)$. Le jeu est-il équitable ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

## Mini mini question de cours

Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

## Exercice 1

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments ($n$ entier naturel non nul). Soit $k$ un entier naturel.

1. Combien y-a-t-il de parties de $E$ ?
2. Combien y-a-t-il de parties de $E$ formées de $k$ éléments ?
3. Quel est le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ ?
4. Combien y a-t-il de couples $(X, Y)$ de parties de $E$ telles que $X \cap Y$ soit un singleton ?

## Exercice 2

Soit $p \in ]0;1[$. Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Gösta Mittag-Leffler décide de jouer à un jeu de pile ou face selon la règle suivante : il effectue une succession de tirages (indépendant les uns des autres et ayant une probabilité $p$ de retourner le résultat "pile"). S'il arrive un moment où il obtient deux " pile" de plus que de "face", alors il a gagné et peut rendre visite à Mme Nobel. Si en revanche il obtient deux " face" de plus que de "pile", alors il a perdu et doit désherber son jardin.

1. Montrer que si la partie se termine alors on a effectué un nombre pair de lancers.
2. A l'instant $n$ ($n$ entier naturel non nul), on note $\Delta_n$ la différence entre le nombre de piles obtenus et le nombre de faces. Ainsi, la partie se termine dès que $(\Delta_n = \pm 2)$ a lieu. On note $A_n$ l'événement : «La partie n'est pas terminée à l'issue du lancer $n$.» Décrire l'événement $A_{2n}$ à l'aide des éléments $(\Delta_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$.
3. Pour $n$ entier naturel non nul, Déterminer $P(A_{2n})$.
4. Quelle est la probabilité que Gösta passe finalement un dimanche agréable ?

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Loi de Poisson : loi ? Espérance ? Variance ? Situation modélisée ?

## Exercice 1

Soient $n$ un entier naturel et $E$ et $F$ deux ensembles. Dénombrez le nombre de surjection de $E$ vers $F$ dans les deux cas suivants *(commencez d'abord par faire pour de petites valeurs de $n$ avant de généraliser)* :

1. $\text{Card }(E) = n+1,\ \text{Card }(F) = n.$
2. $\text{Card }(E) = n+2,\ \text{Card }(F) = n+3.$

## Exercice 2

Des boules en nombre infini numérotées 1,2,... sont placées successivement (et indépendamment les unes des autres) dans trois boîtes.

1. Pour tout entier $k$ supérieur à 2, on note $A_k$ l'événement « Deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $k$-ième boule ».
   (a) Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$.
   (b) Interprétez.
2. Pour tout entier $l$ supérieur à 3, on note $B_l$ l'événement « Les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $l$-ième boule ».
   (a) Calculer $P_{A_k}(B_l)$ pour $k \geqslant 2$ et $l \geqslant 3$.
   (b) En déduire $P(B_l)$ puis $\displaystyle\sum_{l=3}^{+\infty} P(B_l)$.
   (c) Interprétez.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

## Colles de mathématiques

### Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète.

### Exercice 1

1. On lance un dé cubique truqué de façon à ce que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle à son numéro. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
2. Soit $n$ un entier non nul. Déterminer une probabilité $P$ sur $[\![1, n]\!]$ telle que $P([\![1, k]\!])$ soit proportionnelle à $k^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

### Exercice 2

Deux joueurs A et B procèdent l'un après l'autre à une succession de lancers d'une même pièce, amenant pile avec la probabilité $p$ avec $p \in ]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$. Le joueur A commence et il s'arrête dès qu'il obtient le premier pile. Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A. Le joueur B gagne s'il obtient au moins un pile, sinon c'est le joueur A qui gagne. On définit, pour tout entier naturel non nul $n$, $A_n$ l'événement : " le joueur A effectue $n$ lancers" et GA (resp. GB ) l'événement : " le joueur A (resp. B ) gagne".

1. Pour tout entier naturel non nul $n$, calculer $P(A_n)$. En déduire la probabilité que le joueur A ne s'arrête jamais d'effectuer des lancers.
2. Calculer $P(GB)$ et $P(GA)$. Le jeu est-il équitable ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

## Mini mini question de cours

Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

## Exercice 1

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments ($n$ entier naturel non nul). Soit $k$ un entier naturel.

1. Combien y-a-t-il de parties de $E$ ?
2. Combien y-a-t-il de parties de $E$ formées de $k$ éléments ?
3. Quel est le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ ?
4. Combien y a-t-il de couples $(X, Y)$ de parties de $E$ telles que $X \cap Y$ soit un singleton ?

## Exercice 2

Soit $p \in ]0; 1[$. Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Gösta Mittag-Leffler décide de jouer à un jeu de pile ou face selon la règle suivante : il effectue une succession de tirages (indépendant les uns des autres et ayant une probabilité $p$ de retourner le résultat "pile"). S'il arrive un moment où il obtient deux " pile" de plus que de "face", alors il a gagné et peut rendre visite à Mme Nobel. Si en revanche il obtient deux " face" de plus que de "pile", alors il a perdu et doit désherber son jardin.

1. Montrer que si la partie se termine alors on a effectué un nombre pair de lancers.
2. A l'instant $n$ ($n$ entier naturel non nul), on note $\Delta_n$ la différence entre le nombre de piles obtenus et le nombre de faces. Ainsi, la partie se termine dès que ($\Delta_n = \pm 2$) a lieu. On note $A_n$ l'événement : «La partie n'est pas terminée à l'issue du lancer $n$.» Décrire l'événement $A_{2n}$ à l'aide des éléments $(\Delta_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$.
3. Pour $n$ entier naturel non nul, Déterminer $P(A_{2n})$.
4. Quelle est la probabilité que Gösta passe finalement un dimanche agréable ?