Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quand dit-on qu'une fonction est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle ?

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec n entier naturel non nul) et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (X-a)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E.
3. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$. f est-il diagonalisable ?
4. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k avec $k \in [\![0, n+1]\!]$.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   (b) Déterminer l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On suppose que X, Y et Z sont des vecteurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable puis expliciter A.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice 1

On pose $P = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Factoriser P.
2. Calculer $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3$.
3. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda) = 0$.
4. A est -elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$ alors $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.
3. Si f est bijectif, que peut-on dire sur les valeurs propres de f^{-1} ?
4. On suppose maintenant que tout vecteur non nul est un vecteur propre de f. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Montrer de deux façons différentes que $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. f est-il diagonalisable ?
3. On note $u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (2,1,0), \quad u_3 = (1,1,1)$. On définit $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base, écrire la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et son inverse.
4. Expliciter la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$. Quelle relation relie A et T ?
5. Montrer qu'il existe α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire A^n.
7. Si R est une matrice d'ordre 3, on note $C(R) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ RM = MR\}$ l'ensemble des matrices commutant avec R.
   (a) Montrer que $C(R)$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer l'ensemble des matrices de $C(T)$.
   (c) Déterminer une base et la dimension de $C(A)$.
   (d) Expliciter $C(A)$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec n entier naturel non nul) et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (X-a)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E.
3. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$. f est-il diagonalisable ?
4. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k avec $k \in [\![0, n+1]\!]$.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   (b) Déterminer l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On suppose que X, Y et Z sont des vecteurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable puis expliciter A.

BCPST2 **Sujet 2** — Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 — https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 1

On pose $P = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Factoriser P.
2. Calculer $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3$.
3. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda) = 0$.
4. A est -elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$ alors $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.
3. Si f est bijectif, que peut-on dire sur les valeurs propres de f^{-1} ?
4. On suppose maintenant que tout vecteur non nul est un vecteur propre de f. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle admettant une densité.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. f est-il diagonalisable ?
3. On note $u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (2,1,0), \quad u_3 = (1,1,1)$. On définit $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base, écrire la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et son inverse.
4. Expliciter la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$. Quelle relation relie A et T ?
5. Montrer qu'il existe α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire A^n.
7. Si R est une matrice d'ordre 3, on note $C(R) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ RM = MR\}$ l'ensemble des matrices commutant avec R.
   (a) Montrer que $C(R)$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer l'ensemble des matrices de $C(T)$.
   (c) Déterminer une base et la dimension de $C(A)$.
   (d) Expliciter $C(A)$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec n entier naturel non nul) et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (X-a)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E.
3. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$. f est-il diagonalisable ?
4. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k avec $k \in [\![0, n+1]\!]$.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   (b) Déterminer l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On suppose que X, Y et Z sont des vecteurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable puis expliciter A.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 1

On pose $P = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Factoriser P.
2. Calculer $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3$.
3. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda) = 0$.
4. A est -elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$ alors $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.
3. Si f est bijectif, que peut-on dire sur les valeurs propres de f^{-1} ?
4. On suppose maintenant que tout vecteur non nul est un vecteur propre de f. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 19 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle admettant une densité.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. f est-il diagonalisable ?
3. On note $u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (2,1,0), \quad u_3 = (1,1,1)$. On définit $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base, écrire la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et son inverse.
4. Expliciter la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$. Quelle relation relie A et T ?
5. Montrer qu'il existe α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire A^n.
7. Si R est une matrice d'ordre 3, on note $C(R) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ RM = MR\}$ l'ensemble des matrices commutant avec R.
   (a) Montrer que $C(R)$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer l'ensemble des matrices de $C(T)$.
   (c) Déterminer une base et la dimension de $C(A)$.
   (d) Expliciter $C(A)$.