BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Tracer une densité pour une variable aléatoire de loi normale d'espérance 1 et de variance 1.

Exercice 1

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A. A est-elle inversible ? 0 est-il valeur propre de A ?
2. Calculer $(A - I_6)^2$. En déduire, pour tout entier naturel n, la matrice A^n.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice 1

Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Comparer le spectre de A et celui de B.
2. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 2

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et J^3 et en déduire que, si λ est une valeur propre de J, alors $\lambda^3 = 1$.
2. En déduire que J est ou non inversible.
3. Trouver les trois complexes z tels que $z^3 = 1$.
4. Calculer $J \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$ avec m un complexe tel que $m^3 = 1$ et en déduire que J est diagonalisable.
5. Soient a, b et c trois complexes. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de puissances de J et en déduire que M est diagonalisable ainsi que ses valeurs propres.

BCPST2 **Sujet 3** | Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 | https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Densité d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Exercice 1

1. Diagonaliser A avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les matrices M d'ordre 3 telles que $AM = MA$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < -b$. Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto X^2P''(X) - (a+b-1)XP'(X) + abP(X) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Rappeler les résultats connus sur la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson, puis de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales.

Exercice 1

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A. A est-elle inversible ? 0 est-il valeur propre de A ?
2. Calculer $(A - I_6)^2$. En déduire, pour tout entier naturel n, la matrice A^n.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{2}$.

Exercice 1

Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Comparer le spectre de A et celui de B.
2. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 2

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et J^3 et en déduire que, si λ est une valeur propre de J, alors $\lambda^3 = 1$.
2. En déduire que J est ou non inversible.
3. Trouver les trois complexes z tels que $z^3 = 1$.
4. Calculer $J \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$ avec m un complexe tel que $m^3 = 1$ et en déduire que J est diagonalisable.
5. Soient a, b et c trois complexes. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de puissances de J et en déduire que M est diagonalisable ainsi que ses valeurs propres.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle admettant une densité.

Exercice 1

1. Diagonaliser A avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les matrices M d'ordre 3 telles que $AM = MA$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < -b$. Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto X^2P''(X) - (a+b-1)XP'(X) + abP(X) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Rappeler les résultats connus sur la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson, puis de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales.

Exercice 1

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A. A est-elle inversible ? 0 est-il valeur propre de A ?
2. Calculer $(A - I_6)^2$. En déduire, pour tout entier naturel n, la matrice A^n.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{2}$.

Exercice 1

Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Comparer le spectre de A et celui de B.
2. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 2

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et J^3 et en déduire que, si λ est une valeur propre de J, alors $\lambda^3 = 1$.
2. En déduire que J est ou non inversible.
3. Trouver les trois complexes z tels que $z^3 = 1$.
4. Calculer $J \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$ avec m un complexe tel que $m^3 = 1$ et en déduire que J est diagonalisable.
5. Soient a, b et c trois complexes. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de puissances de J et en déduire que M est diagonalisable ainsi que ses valeurs propres.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 20 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle admettant une densité.

Exercice 1

1. Diagonaliser A avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les matrices M d'ordre 3 telles que $AM = MA$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < -b$. Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto X^2P''(X) - (a+b-1)XP'(X) + abP(X) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.