BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ (n entier naturel non nul).

Exercice 1

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : t \longmapsto \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité. On note X la variable aléatoire associée.
2. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Pour tout λ réel strictement positif, calculer $E(e^{\lambda X})$.
2. On suppose désormais que X est une variable aléatoire réelle à densité, telle que, pour tout réel non nul λ, $e^{\lambda X}$ admette une espérance, et :

$$E(e^{\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout réel t, $e^{|t|} \geqslant |t|$ et $e^t \geqslant 1 + t$.

   (b) Montrer que $E(X)$ existe et que $E(e^{\lambda X}) \geqslant 1 + \lambda E(X)$ pour tout réel non nul λ.

   (c) Montrer que, pour tout réel strictement positif u, on a :

$$\frac{1 - e^{u^2/2}}{u} \leqslant E(X) \leqslant \frac{e^{u^2/2} - 1}{u}.$$

   En déduire la valeur de $E(X)$.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer sa fonction de répartition F.
3. Déterminer $P(5 < X < 12)$.
4. Montrer que X est centrée.
5. Déterminer la loi de $\ln(e^X + 1)$.

Exercice 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 20])$. On dispose d'un double décimètre que l'on casse à la graduation X.

1. Loi et espérance du plus grand morceau.
2. Loi et espérance du plus petit morceau.
3. Quelle est la probabilité pour que le plus grand soit plus de 3 fois plus long que le petit ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$ par : :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(\ln(t))^2\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité. On note X la variable aléatoire associée.
2. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.
3. Comparer $E(\ln(X))$ et $\ln(E(X))$ *(on admettra que la variable aléatoire* $\ln(X)$ *est à densité).*

Exercice 2

On considère les fonctions f et φ suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}. \quad \text{et} \quad \varphi : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) Étudier les variations de φ et montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
   (b) Donner l'expression de la bijection réciproque de φ.
4. On pose $Y = \varphi(X)$. Montrer que Y est variable aléatoire à densité et donner une densité de Y puis calculer $E(Y)$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ normal au vecteur vect$u = (1, 2, -1)$.

Exercice 1

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : t \longmapsto \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité. On note X la variable aléatoire associée.
2. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Pour tout λ réel strictement positif, calculer $E(e^{\lambda X})$.
2. On suppose désormais que X est une variable aléatoire réelle à densité, telle que, pour tout réel non nul λ, $e^{\lambda X}$ admette une espérance, et :

$$E(e^{\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout réel t, $e^{|t|} \geqslant |t|$ et $e^t \geqslant 1 + t$.

   (b) Montrer que $E(X)$ existe et que $E(e^{\lambda X}) \geqslant 1 + \lambda E(X)$ pour tout réel non nul λ.

   (c) Montrer que, pour tout réel strictement positif u, on a :

$$\frac{1 - e^{u^2/2}}{u} \leqslant E(X) \leqslant \frac{e^{u^2/2} - 1}{u}.$$

   En déduire la valeur de $E(X)$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition de la distance d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer sa fonction de répartition F.
3. Déterminer $P(5 < X < 12)$.
4. Montrer que X est centrée.
5. Déterminer la loi de $\ln(e^X + 1)$.

Exercice 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 20])$. On dispose d'un double décimètre que l'on casse à la graduation X.

1. Loi et espérance du plus grand morceau.
2. Loi et espérance du plus petit morceau.
3. Quelle est la probabilité pour que le plus grand soit plus de 3 fois plus long que le petit ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$ par : :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(\ln(t))^2\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité. On note X la variable aléatoire associée.
2. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.
3. Comparer $E(\ln(X))$ et $\ln(E(X))$ *(on admettra que la variable aléatoire* $\ln(X)$ *est à densité).*

Exercice 2

On considère les fonctions f et φ suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}. \quad \text{et} \quad \varphi : x \longmapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) Étudier les variations de φ et montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
   (b) Donner l'expression de la bijection réciproque de φ.
4. On pose $Y = \varphi(X)$. Montrer que Y est variable aléatoire à densité et donner une densité de Y puis calculer $E(Y)$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ normal au vecteur vect$u = (1, 2, -1)$.

Exercice 1

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : t \longmapsto \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité. On note X la variable aléatoire associée.
2. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Pour tout λ réel strictement positif, calculer $E(e^{\lambda X})$.
2. On suppose désormais que X est une variable aléatoire réelle à densité, telle que, pour tout réel non nul λ, $e^{\lambda X}$ admette une espérance, et :

$$E(e^{\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout réel t, $e^{|t|} \geqslant |t|$ et $e^t \geqslant 1 + t$.

   (b) Montrer que $E(X)$ existe et que $E(e^{\lambda X}) \geqslant 1 + \lambda E(X)$ pour tout réel non nul λ.

   (c) Montrer que, pour tout réel strictement positif u, on a :

$$\frac{1 - e^{u^2/2}}{u} \leqslant E(X) \leqslant \frac{e^{u^2/2} - 1}{u}.$$

   En déduire la valeur de $E(X)$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition de la distance d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer sa fonction de répartition F.
3. Déterminer $P(5 < X < 12)$.
4. Montrer que X est centrée.
5. Déterminer la loi de $\ln(e^X + 1)$.

Exercice 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 20])$. On dispose d'un double décimètre que l'on casse à la graduation X.

1. Loi et espérance du plus grand morceau.
2. Loi et espérance du plus petit morceau.
3. Quelle est la probabilité pour que le plus grand soit plus de 3 fois plus long que le petit ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définition d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$ par : :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(\ln(t))^2\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité. On note X la variable aléatoire associée.
2. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.
3. Comparer $E(\ln(X))$ et $\ln(E(X))$ *(on admettra que la variable aléatoire* $\ln(X)$ *est à densité).*

Exercice 2

On considère les fonctions f et φ suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}. \quad \text{et} \quad \varphi : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) Étudier les variations de φ et montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
   (b) Donner l'expression de la bijection réciproque de φ.
4. On pose $Y = \varphi(X)$. Montrer que Y est variable aléatoire à densité et donner une densité de Y puis calculer $E(Y)$.