BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Expression du projeté d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dont on connaît une base orthonormale.

Exercice 1

Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad G : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+e^x}.$$

1. Dire si les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition de variable aléatoire à densité.
2. Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, donner la loi de X (même question avec G!).

Exercice 2

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour entier naturel non nul n, $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Y_j$.

1. Donner une densité et la fonction de répartition de Y.
2. Expliciter $E(Y^n)$ pour n entier naturel.
3. Donner la loi de S_2 *(demandez moi la formule du produit de convolution!!)*
4. Montrer que S_n admet une densité g_n définie par :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citez les identités remarquables et l'identité du parallélogramme.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
2. Calculer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.
4. Montrer que $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. on pose $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est à densité et en préciser une densité g. Donner l'espérance de Y.
2. Soit p un réel positif. On pose $q = 1 - p$ et

$$h : x \mapsto \begin{cases} pg(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ qg(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   Montrer que h est une densité d'une variable aléatoire.
3. Soit Z admettant cette densité. Déterminer son espérance et sa fonction de répartition.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner une représentation paramétrique de la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et dirigée par le vecteur vect$u$ de coordonnées (a, b, c).

Exercice 1

1. Déterminer le réel c pour que la fonction f suivante :
$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
soit une densité d'une variable aléatoire X.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

Exercice 2

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,2])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([2,3])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Déterminer la loi de Z définie par : $Z = X - Y$. (Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution)

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ normal au vecteur $(1, 2, -1)$.

Exercice 1

Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad G : x \mapsto 1 - \frac{1}{1 + e^x}.$$

1. Dire si les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition de variable aléatoire à densité.
2. Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, donner la loi de X (même question avec G!).

Exercice 2

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour entier naturel non nul n, $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.

1. Donner une densité et la fonction de répartition de Y.
2. Expliciter $E(Y^n)$ pour n entier naturel.
3. Donner la loi de S_2 *(demandez moi la formule du produit de convolution!!)*
4. Montrer que S_n admet une densité g_n définie par :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citez les identités remarquables et l'identité de polarisation.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
2. Calculer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.
4. Montrer que $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. on pose $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est à densité et en préciser une densité g. Donner l'espérance de Y.
2. Soit p un réel positif. On pose $q = 1 - p$ et
$$h : x \mapsto \begin{cases} pg(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ qg(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
Montrer que h est une densité d'une variable aléatoire.
3. Soit Z admettant cette densité. Déterminer son espérance et sa fonction de répartition.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Expression d'un vecteur dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

1. Déterminer le réel c pour que la fonction f suivante :
$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
soit une densité d'une variable aléatoire X.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

Exercice 2

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,2])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([2,3])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Déterminer la loi de Z définie par : $Z = X - Y$. (Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution)

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ normal au vecteur $(1, 2, -1)$.

Exercice 1

Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad G : x \mapsto 1 - \frac{1}{1 + e^x}.$$

1. Dire si les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition de variable aléatoire à densité.
2. Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, donner la loi de X (même question avec G!).

Exercice 2

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour entier naturel non nul n, $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Y_j$.

1. Donner une densité et la fonction de répartition de Y.
2. Expliciter $E(Y^n)$ pour n entier naturel.
3. Donner la loi de S_2 *(demandez moi la formule du produit de convolution!!)*
4. Montrer que S_n admet une densité g_n définie par :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citez les identités remarquables et l'identité de polarisation.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
2. Calculer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.
4. Montrer que $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. on pose $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est à densité et en préciser une densité g. Donner l'espérance de Y.
2. Soit p un réel positif. On pose $q = 1 - p$ et

$$h : x \mapsto \begin{cases} pg(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ qg(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   Montrer que h est une densité d'une variable aléatoire.
3. Soit Z admettant cette densité. Déterminer son espérance et sa fonction de répartition.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Expression d'un vecteur dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

1. Déterminer le réel c pour que la fonction f suivante :
$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
soit une densité d'une variable aléatoire X.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

Exercice 2

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,2])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([2,3])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Déterminer la loi de Z définie par : $Z = X - Y$. (Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution)