BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 18 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer une condition suffisante et non nécessaire pour qu'une matrice soit diagonalisable, puis une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Exercice 1

Un ingénieur lumière s'occupe de l'éclairage pour un concert. Il possède 4 projecteurs notés P_1, P_2, P_3 et P_4. Il les allume de la manière suivante.

- Le concert débute avec le projecteur 1 allumé.
- Si le projecteur P_1 est allumé alors un et un des projecteurs P_1, P_2, P_3 ou P_4 s'allume à l'instant suivant et le choix est fait de manière équiprobable.
- Si le projecteur P_k est allumé pour $k \in [\![2, 4]\!]$ alors le projecteur P_{k-1} s'allume à l'instant suivant.
- Un seul projecteur est allumé en même temps.

On note X le premier instant où P_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité que P_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter.
5. Écrire un script permettant de modéliser la situation et qui renvoie la valeur prise par X.

Exercice 2

Le jour du concours, n élèves (n entier naturel non nul) n'ont pas assez soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de s'escrimer à lire d'infâmes brouillons, décide de noter au hasard, de manière indépendante, les n copies, en leur attribuant une note entière, au hasard, entre 0 et 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Expliciter la loi de X_n.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(X_n = k))$ pour tout entier naturel k. Interpréter.
3. Calculer $E(X_n)$ et donner un équivalent de $(20 - E(X_n))$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 18 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Que peut-on dire sur les matrices triangulaires dans le chapitre de diagonalisation ? Que peut-on dire sur les matrices symétriques dans le chapitre de diagonalisation ?

Exercice 1

On place dans une urne n (n entier naturel non nul) boules qui sont soit rouges soit blanches. On ne connaît pas a priori le nombre de boules blanches : c'est une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

1. On tire une boule dans l'urne. Calculer, en fonction de l'espérance de X, la probabilité qu'elle soit blanche.
2. On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne. On note B_i l'événement " la i-ième boule tirée est blanche " (avec $i \in \{1, 2\}$).
   (a) Calculer, en fonction de $E(X^2)$, la probabilité de $B_1 \cap B_2$.
   (b) Montrer que B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si X est de variance nulle, et interpréter ce résultat.
   (c) Montrer et interpréter l'inégalité $P_{B_1}(B_2) \geqslant P(B_2)$.

Exercice 2

On lance indéfiniment un dé et on note X le numéro du lancer amenant le premier 6. Si X est pair, on gagne X euros. Sinon, on perd X euros. On note Y le gain algébrique (positif ou négatif) ainsi obtenu.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ en justifiant son existence.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 18 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Que peut-on dire du nombre de valeurs propres d'un endomorphisme ? Un endomorphisme peut-il avoir un seule valeur propre ? Un endomorphisme peut-il avoir une infinité de valeurs propres ?

Exercice 1

À une table de roulette de casino, un joueur joue une couleur : noire ou rouge. La probabilité de gagner est p avec $p \in]0,1[$, et en cas de victoire, le casino paie deux fois la mise. Un joueur astucieux adopte la stratégie suivante :

- Il mise un euro. S'il gagne, il quitte la table avec son gain de un euro.
- S'il perd la première partie, il mise 2 euros. S'il gagne, il quitte la table.
- S'il perd, il joue 4 euros...
- ... et ainsi de suite : il double sa mise après chaque partie perdue, et il arrête à la première partie gagnée.

Déterminer la loi de G, le gain du joueur.

Exercice 2

On lance successivement une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in [0,1]$. On note X le rang correspondant à la première fois que l'on obtient 2 piles consécutifs. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer p_1, p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$ alors $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire une expression pour p_n pour tout entier naturel n non nul.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat.
5. Écrire un script permettant de simuler la situation et qui renvoie la valeur prise par X.

Que peut-on dire sur les matrices inversibles dans le chapitre de diagonalisation ? Que peut-on dire sur les matrices symétriques dans le chapitre de diagonalisation ? Un ingénieur lumière s'occupe de l'éclairage pour un concert. Il possède 4 projecteurs notés P_1, P_2, P_3 et P_4. Il les allume de la manière suivante.

- Le concert débute avec le projecteur 1 allumé.
- Si le projecteur P_1 est allumé alors un et un des projecteurs P_1, P_2, P_3 ou P_4 s'allume à l'instant suivant et le choix est fait de manière équiprobable.
- Si le projecteur P_k est allumé pour $k \in [\![2, 4]\!]$ alors le projecteur P_{k-1} s'allume à l'instant suivant.
- Un seul projecteur est allumé en même temps.

On note X le premier instant où P_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité que P_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter.
5. Écrire un script permettant de modéliser la situation et qui renvoie la valeur prise par X.

Le jour du concours, n élèves (n entier naturel non nul) n'ont pas assez soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de s'escrimer à lire d'infâmes brouillons, décide de noter au hasard, de manière indépendante, les n copies, en leur attribuant une note entière, au hasard, entre 0 et 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Expliciter la loi de X_n.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(X_n = k))$ pour tout entier naturel k. Interpréter.
3. Calculer $E(X_n)$ et donner un équivalent de $(20 - E(X_n))$.

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1

On place dans une urne n (n entier naturel non nul) boules qui sont soit rouges soit blanches. On ne connaît pas a priori le nombre de boules blanches : c'est une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

1. On tire une boule dans l'urne. Calculer, en fonction de l'espérance de X, la probabilité qu'elle soit blanche.
2. On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne. On note B_i l'événement " la i-ième boule tirée est blanche " (avec $i \in \{1, 2\}$).
   (a) Calculer, en fonction de $E(X^2)$, la probabilité de $B_1 \cap B_2$.
   (b) Montrer que B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si X est de variance nulle, et interpréter ce résultat.
   (c) Montrer et interpréter l'inégalité $P_{B_1}(B_2) \geqslant P(B_2)$.

Exercice 2

On lance indéfiniment un dé et on note X le numéro du lancer amenant le premier 6. Si X est pair, on gagne X euros. Sinon, on perd X euros. On note Y le gain algébrique (positif ou négatif) ainsi obtenu.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ en justifiant son existence.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Exercice 1

À une table de roulette de casino, un joueur joue une couleur : noire ou rouge. La probabilité de gagner est p avec $p \in]0,1[$, et en cas de victoire, le casino paie deux fois la mise. Un joueur astucieux adopte la stratégie suivante :

- Il mise un euro. S'il gagne, il quitte la table avec son gain de un euro.
- S'il perd la première partie, il mise 2 euros. S'il gagne, il quitte la table.
- S'il perd, il joue 4 euros...
- ... et ainsi de suite : il double sa mise après chaque partie perdue, et il arrête à la première partie gagnée.

Déterminer la loi de G, le gain du joueur.

Exercice 2

On lance successivement une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in [0,1]$. On note X le rang correspondant à la première fois que l'on obtient 2 piles consécutifs. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer p_1, p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$ alors $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire une expression pour p_n pour tout entier naturel n non nul.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat.
5. Écrire un script permettant de simuler la situation et qui renvoie la valeur prise par X.

Que peut-on dire sur les matrices inversibles dans le chapitre de diagonalisation ? Que peut-on dire sur les matrices symétriques dans le chapitre de diagonalisation ? Un ingénieur lumière s'occupe de l'éclairage pour un concert. Il possède 4 projecteurs notés P_1, P_2, P_3 et P_4. Il les allume de la manière suivante.

- Le concert débute avec le projecteur 1 allumé.
- Si le projecteur P_1 est allumé alors un et un des projecteurs P_1, P_2, P_3 ou P_4 s'allume à l'instant suivant et le choix est fait de manière équiprobable.
- Si le projecteur P_k est allumé pour $k \in [\![2, 4]\!]$ alors le projecteur P_{k-1} s'allume à l'instant suivant.
- Un seul projecteur est allumé en même temps.

On note X le premier instant où P_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité que P_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter.
5. Écrire un script permettant de modéliser la situation et qui renvoie la valeur prise par X.

Le jour du concours, n élèves (n entier naturel non nul) n'ont pas assez soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de s'escrimer à lire d'infâmes brouillons, décide de noter au hasard, de manière indépendante, les n copies, en leur attribuant une note entière, au hasard, entre 0 et 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Expliciter la loi de X_n.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(X_n = k))$ pour tout entier naturel k. Interpréter.
3. Calculer $E(X_n)$ et donner un équivalent de $(20 - E(X_n))$.

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1

On place dans une urne n (n entier naturel non nul) boules qui sont soit rouges soit blanches. On ne connaît pas a priori le nombre de boules blanches : c'est une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

1. On tire une boule dans l'urne. Calculer, en fonction de l'espérance de X, la probabilité qu'elle soit blanche.
2. On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne. On note B_i l'événement " la i-ième boule tirée est blanche " (avec $i \in \{1, 2\}$).
   (a) Calculer, en fonction de $E(X^2)$, la probabilité de $B_1 \cap B_2$.
   (b) Montrer que B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si X est de variance nulle, et interpréter ce résultat.
   (c) Montrer et interpréter l'inégalité $P_{B_1}(B_2) \geqslant P(B_2)$.

Exercice 2

On lance indéfiniment un dé et on note X le numéro du lancer amenant le premier 6. Si X est pair, on gagne X euros. Sinon, on perd X euros. On note Y le gain algébrique (positif ou négatif) ainsi obtenu.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ en justifiant son existence.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 18 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Exercice 1

À une table de roulette de casino, un joueur joue une couleur : noire ou rouge. La probabilité de gagner est p avec $p \in]0,1[$, et en cas de victoire, le casino paie deux fois la mise. Un joueur astucieux adopte la stratégie suivante :

- Il mise un euro. S'il gagne, il quitte la table avec son gain de un euro.
- S'il perd la première partie, il mise 2 euros. S'il gagne, il quitte la table.
- S'il perd, il joue 4 euros...
- ... et ainsi de suite : il double sa mise après chaque partie perdue, et il arrête à la première partie gagnée.

Déterminer la loi de G, le gain du joueur.

Exercice 2

On lance successivement une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in [0,1]$. On note X le rang correspondant à la première fois que l'on obtient 2 piles consécutifs. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer p_1, p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$ alors $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire une expression pour p_n pour tout entier naturel n non nul.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat.
5. Écrire un script permettant de simuler la situation et qui renvoie la valeur prise par X.