BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n. On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Si x est un vecteur de E, quelle relation lie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$?

Exercice 1

Une urne contient n (avec n entier naturel non nul) boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$ précisant le nombre de tirages alors effectués.

1. Calculer $\mathrm{P}(T = 2)$.
2. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Exprimer $\mathrm{P}_{(T>k-1)}(T > k)$.
3. En déduire un expression de $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$.

Exercice 2

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour n entier naturel non nul, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Écrire un programme en `Python` qui simule une expérience et renvoie la valeur de X.
2. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
3. Montrer que l'on a pour $n \geqslant 4$:
$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$
4. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
5. Proposer un programme `Python` renvoyant une approximation de la valeur de $E(X)$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Matrices semblables : définition.

Exercice 1

1. Soit X une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ telle que $\mathbf{E}(X) = 6$. Déterminer n.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Pour quelle valeur de $k \in [\![0, n]\!]$ a-t-on $\mathbb{P}(X = k)$ qui est maximale ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une urne de n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On arrête quand on obtient un numéro déjà obtenu. Soit T_n le rang de la dernière boule tirée.

1. On considère uniquement dans cette question que $n = 3$. Donner la loi de T_3 et son espérance.
2. Déterminer $T_n(\Omega)$ et montrer que : $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T_n > k)$.
3. Montrer que $P(T_n > k) = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
4. Donner la loi de T_n.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E.

Exercice 1

On a une urne avec une boule noire et une boule blanche. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant de plus une boule noire. On note Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule noire tirée.

1. Donner la loi de Y.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer de boule noire ?
3. Y admet-elle une espérance et, si oui, la calculer. Même question avec la variance.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\left((X-\lambda+1)^2 \geqslant (\lambda+1)^2\right)$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie et f un endomorphisme de E. On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Donner une relation entre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et P.

Exercice 1

Une urne contient n (avec n entier naturel non nul) boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$ précisant le nombre de tirages alors effectués.

1. Calculer $\mathrm{P}(T=2)$.
2. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Exprimer $\mathrm{P}_{(T>k-1)}(T>k)$.
3. En déduire un expression de $\mathrm{P}(T=k)$ pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$.

Exercice 2

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour n entier naturel non nul, on note p_n la probabilité $P(X=n)$.

1. Écrire un programme en `Python` qui simule une expérience et renvoie la valeur de X.
2. Expliciter les événements $(X=2)$, $(X=3)$, $(X=4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
3. Montrer que l'on a pour $n \geqslant 4$:
$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$
4. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
5. Proposer un programme `Python` renvoyant une approximation de la valeur de $E(X)$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1

1. Soit X une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ telle que $\mathbf{E}(X) = 6$. Déterminer n.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Pour quelle valeur de $k \in [\![0, n]\!]$ a-t-on $\mathbb{P}(X = k)$ qui est maximale ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une urne de n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On arrête quand on obtient un numéro déjà obtenu. Soit T_n le rang de la dernière boule tirée.

1. On considère uniquement dans cette question que $n = 3$. Donner la loi de T_3 et son espérance.
2. Déterminer $T_n(\Omega)$ et montrer que : $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T_n > k)$.
3. Montrer que $P(T_n > k) = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
4. Donner la loi de T_n.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Exercice 1

On a une urne avec une boule noire et une boule blanche. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant de plus une boule noire. On note Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule noire tirée.

1. Donner la loi de Y.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer de boule noire ?
3. Y admet-elle une espérance et, si oui, la calculer. Même question avec la variance.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\left((X-\lambda+1)^2 \geqslant (\lambda+1)^2\right)$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie et f un endomorphisme de E. On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Donner une relation entre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et P.

Exercice 1

Une urne contient n (avec n entier naturel non nul) boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$ précisant le nombre de tirages alors effectués.

1. Calculer $\mathrm{P}(T=2)$.
2. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Exprimer $\mathrm{P}_{(T>k-1)}(T>k)$.
3. En déduire un expression de $\mathrm{P}(T=k)$ pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$.

Exercice 2

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\dfrac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour n entier naturel non nul, on note p_n la probabilité $P(X=n)$.

1. Écrire un programme en `Python` qui simule une expérience et renvoie la valeur de X.
2. Expliciter les événements $(X=2)$, $(X=3)$, $(X=4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
3. Montrer que l'on a pour $n \geqslant 4$:

$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

4. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
5. Proposer un programme `Python` renvoyant une approximation de la valeur de $E(X)$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1

1. Soit X une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ telle que $\mathbf{E}(X) = 6$. Déterminer n.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Pour quelle valeur de $k \in [\![0, n]\!]$ a-t-on $\mathbb{P}(X = k)$ qui est maximale ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une urne de n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On arrête quand on obtient un numéro déjà obtenu. Soit T_n le rang de la dernière boule tirée.

1. On considère uniquement dans cette question que $n = 3$. Donner la loi de T_3 et son espérance.
2. Déterminer $T_n(\Omega)$ et montrer que : $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T_n > k)$.
3. Montrer que $P(T_n > k) = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
4. Donner la loi de T_n.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Exercice 1

On a une urne avec une boule noire et une boule blanche. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant de plus une boule noire. On note Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule noire tirée.

1. Donner la loi de Y.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer de boule noire ?
3. Y admet-elle une espérance et, si oui, la calculer. Même question avec la variance.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\left((X-\lambda+1)^2 \geqslant (\lambda+1)^2\right)$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$