MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 11 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Une boule ouverte d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E est un ouvert de E.

Exercice 1

Soit f une une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Montrer que $\left\{\frac{p}{2^n} \text{ avec } (p,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.
3. Conclure que f est une fonction affine.

Exercice 2

On appelle E l'ensemble $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et on pose :

$$N_1 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto |f(0)| + \sup(\{\,|f'(t)|, t \in [-1,1]\,\}) \end{cases}$$

ainsi que :

$$N_2 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)|dt \end{cases} \quad \text{et} \quad N_\infty = \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \sup(\{\,|f(t)|, t \in [-1,1]\,\}) \end{cases}.$$

1. Montrer que ce sont des normes sur E.
2. Comparer N_1 et N_∞ d'une part et N_2 et N_∞ d'autre part.

Question de cours

Caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 1

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note :

$$B_1 = \{x \in E \text{ tel que } N_1(x) \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{x \in E \text{ tel que } N_2(x) \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.
2. Même question avec les boules unités ouvertes.

Exercice 2

On appelle E l'ensemble $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_\star^+)$, f et g deux fonctions de E et on pose :

$$N : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{cases}$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que $\dfrac{1}{u+v} \leqslant \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{v}$ si a et b sont deux réels positifs tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ et u et v sont deux réels strictement positifs.
3. Montrer que $N\left((f+g)^{-1}\right) \leqslant \dfrac{N(f)^2 N\left(f^{-1}\right) + N(g)^2 N\left(g^{-1}\right)}{(N(f)+N(g))^2}$.
4. En déduire que :

$$N(f+g)N\left((f+g)^{-1}\right) \leqslant \max\left(N(f)N\left(f^{-1}\right), N(g)N\left(g^{-1}\right)\right).$$

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 11

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $|||_\infty$. Montrer que $\{ f \in E \text{ tel que : } f(1) > 0\}$ est un ouvert de E. On proposera deux preuves différentes, une seule sera à rédiger.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. (a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On appelle E l'ensemble $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et on pose $N_1 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt \end{cases}$ ainsi que :

$$N_2 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \left(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad N_\infty = \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \sup(\{|f(t)|, t \in [0,1]\}) \end{cases}.$$

1. Montrer que ce sont des normes sur E.
2. Comparer N_∞ et N_1, N_∞ et N_2 et montrer que N_∞ n'équivaut ni à N_1, ni à N_2.
3. Comparer N_1 et N_2.