BL2 **Sujet 1** Autres sujets posés sur:
Semaine de colle: 9 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$

Exercice

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } xy = 0 \}$,
2. $E = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que : } x+y = 2z \text{ et } z-t = 0 \}$,
3. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que : } x+2y+z = 0 \text{ et } y+z-2t = 0 \right\}$.

Exercice

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A avec :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^3$, n un entier naturel.

1. Expliciter f.
2. Montrer que A est inversible, que peut-on en déduire pour f ?
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$
4. Montrer que $u = (1,1,1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soit $v = (1,-1,1)$ et $w = (4,2,1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w.
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
9. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définir le noyau d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Comment peut-on caractériser les applications linéaires injectives ?

Exercice

Soient A et B les ensembles suivants :

$$A = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 3y - 2z = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x - y + z + t = x - t = 0 \right\}.$$

1. Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer une base de A et de B.
3. Déterminer une base de $A \cap B$.

Exercice

Soit $D = \text{Vect}((1,1,2))$ et $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner le rang de f, déterminer son noyau et son image.
3. Déterminer une base de P.
4. Vérifier que P et D sont supplémentaires, cela signifie que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme $x_1 + x_2$ avec x_1 dans P et x_2 dans D.
5. Montrer que $f(D) \subset D$.
6. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

BL2 **Sujet 3**
Semaine de colle: 9

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition d'une famille libre $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E.

Exercice

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de l'image de f.
3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice

On pose : $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0\}$ et :

$$Q = \text{ Vect } ((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 2), (2, 3, 0, 1))\,.$$

1. Démontrer que P est un espace vectoriel.
2. Déterminez une base et la dimension des espaces P et Q.
3. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z et t pour que v appartienne à Q.
4. Expliciter $P \cap Q$.
5. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique couple (v_1, v_2) tel que v_1 appartienne à Q, v_2 appartienne à P et $v = v_1 + v_2$.
6. Recommencer l'exercice avec :

$$P = \left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0\right\}$$

et :

$$Q = \text{ Vect } \left(1 + X + X^3, 1 + 2X^3, 2 + 3X + X^3\right).$$