

MP Sujet 1

Semaine de colle: 12

Corrigé dès mercredi sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Image réciproque et continuité.

Exercice 1

Soit f une fonction numérique continue sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1. Montrer que $\left\{ \frac{p}{2^n} \text{ avec } (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est dense dans \mathbb{R} .
2. Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.
3. Conclure que f est une fonction affine.

Exercice 2

Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } : x^2 + y^2 < x^3 + y^3\}$.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ avec n entier naturel non nul.
3. $\{(x, y) \in E^2 \text{ tel que } (x, y) \text{ libre}\}$ avec E un espace vectoriel euclidien.
4. L'ensemble des matrices d'ordre n (n entier naturel non nul) de rang supérieur à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Question de cours

Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ avec A et B deux matrices d'ordre n (n entier naturel non nul).

Exercice 1

1. Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\{x \in E \text{ tel que } \|u(x)\| = 1\}$ est fermée.
2. Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 2

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E . On note :

$$B_1 = \{x \in E \text{ tel que } N_1(x) \leq 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{x \in E \text{ tel que } N_2(x) \leq 1\}.$$

1. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.
2. Même question avec les boules unités ouvertes.

MP Sujet 3

Semaine de colle: 12

Corrigé dès mercredi sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Continuité de l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : M \mapsto \text{Tr}(M^T M)$.

Exercice 1

1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble $\{x \in [0, 1] \text{ tel que } : f(x) = x\}$ est un intervalle fermé et non vide.
2. Chercher les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant :

$$f \circ f = f.$$

3. Chercher les fonctions f dérivables de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant :

$$f \circ f = f.$$

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

- 1.(a) Montrer que \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .
(b) Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.