MP **Sujet 1** | Colleur

Semaine de colle: 12 | Mayeul

–

Elève **Note sur 20**

Question de cours

Image réciproque et continuité.

Exercice 1

Soit f une une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Montrer que $\left\{\frac{p}{2^n} \text{ avec } (p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.
3. Conclure que f est une fonction affine.

Exercice 2

Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x^2 + y^2 < x^3 + y^3\}$.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ avec n entier naturel non nul.
3. $\{(x, y) \in E^2 \text{ tel que } (x, y) \text{ libre}\}$ avec E un espace vectoriel euclidien.
4. L'ensemble des matrices d'ordre n (n entier naturel non nul) de rang supérieur à $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

MP **Sujet 2** | Colleur

Semaine de colle: 12 | Mayeul

–

Elève | **Note sur 20**

Question de cours

Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ avec A et B deux matrices d'ordre n (n entier naturel non nul).

Exercice 1

1. Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\{x \in E \text{ tel que : } ||u(x)|| = 1\}$ est fermée.
2. Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 2

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note :

$$B_1 = \{\, x \in E \text{ tel que } N_1(x) \leqslant 1 \,\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{\, x \in E \text{ tel que } N_2(x) \leqslant 1 \,\}.$$

1. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.
2. Même question avec les boules unités ouvertes.

MP **Sujet 3** Colleur

Semaine de colle: 12 Mayeul

–

Elève **Note sur 20**

Question de cours

Continuité de l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : M \mapsto \operatorname{Tr}\left(M^T M\right)$.

Exercice 1

1. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble $\{x \in [0,1] \text{ tel que : } f(x) = x\}$ est un intervalle fermé et non vide.
2. Chercher les fonctions f continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et vérifiant :
$$f \circ f = f.$$
3. Chercher les fonctions f dérivables de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et vérifiant :
$$f \circ f = f.$$

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. (a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.