BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définir les sommes de Riemann associées à une fonction f sur un intervalle $[a;b]$. Énoncer le théorème de Riemann. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 e^t dt$.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)dx$.

Exercice 2

1. Étudier la parité de $x \mapsto x^3 \sin(x)\exp(x^2)$ puis $\cos\sin$ et enfin $x \mapsto 1 + x^2\sin(x)$.
2. Posons $f = g + h$ avec g une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ et h une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(-x)$. Même travail avec h.
3. Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. Décomposer les fonctions de la question 1 sous la forme d'une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

BCPST1 **Sujet 2** Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.

Exercice 1

Calculer les limites, si elles existent, des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right), v_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 \text{ et } w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 2

On pose $f : x \mapsto \ln(|2x+1|) + \ln(|x+3|)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Résoudre alors l'inéquation suivante $\ln(|2x+1|) + \ln(|x+3|) < \ln(3)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

BCPST1 **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 9 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition et caractérisation des tangentes à la courbe d'une fonction.

Exercice 1

Calculer $\int_1^2 x^2 \exp(3x)dx$ et $\int_1^0 \arctan(x)dx$.

Exercice 2

On considère l'équation
$$(E): \quad x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Vérifier que $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$ sont solutions de (E).
2. En considérant les variations de la fonction $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que (E) admet exactement deux solutions, puis conclure.