BL2 **Sujet 1** — Semaine de colle: 10

Autres sujets posés sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Intégrale de Riemann : critère de convergence et valeur

Exercice

Étudier la convergence et calculer, en cas de convergence, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ puis de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice

On note f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.

On pose pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que I_n est bien définie sans expliciter I_n.
2. Sans expliciter $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire qu'elle converge.
3. Expliciter $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n)$.
4. Montrer que $I_n \geqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$ pour tout entier naturel non nul n. En déduire la nature de la série de terme général I_n.

BL2 **Sujet 2** Autres sujets posés sur:
Semaine de colle: 10 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Critère de convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$

Exercice

Étudier la convergence et calculer, en cas de convergence, la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis de $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice

On pose : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer, par comparaison, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ converge. En déduire l'existence de I. Rappeler sa valeur.
2. (a) Grâce à un changement de variable, calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 - t - 1)\,\mathrm{d}t$ (*indication : effectuer la factorisation canonique de $-t^2-t-1$ pour se ramener à I après changement de variable*). Calculer de même $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 + 3t - 2)\,\mathrm{d}t$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Étudier $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(t^{n+2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)$. Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ tel que : $\forall t \geqslant A : 0 \leqslant t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{t^2}$. En déduire que l'intégrale I_n existe.
   (b) Donner la valeur de I_0 puis calculer I_1.
   (c) Démontrer que : $I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis calculer I_n en fonction de n.

BL2 **Sujet 3**
Semaine de colle: 10

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Théorème d'équivalence pour intégrale impropre de fonctions positives

Exercice

Étudier la convergence et calculer, en cas de convergence, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t$ puis de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|t|)\,\mathrm{d}t$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$. On note F la primitive de f s'annulant en 1.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. A l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, calculer explicitement $F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement positif.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.