MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 13

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec α dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}, \sum_{n\geqslant 0} z^{n^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} z^n$$

avec α un réel.

Exercice 2

Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^{2n+1}}$ avec z un complexe tel que $|z| < 1$.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 13 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Convergence et somme de la série entière réelle

$$\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n, \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n, \sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

avec a_n la n-ième décimale de $\sqrt{3}$.

Exercice 2

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ et de $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$.

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 13

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Déterminer le développement en série entière de arcsin.

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n!z^n, \sum_{n\geqslant 0} \sin(n)z^n, \sum_{n\geqslant 0} \sin(e^{-n})z^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} d(n)z^n$$

avec $d(n)$ le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier naturel n.

Exercice 2

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}.$$

On note R' le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

1. Montrer que $R' \geqslant 1$ et $R' \geqslant R$.
2. Montrer que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
3. Exprimer alors R' en fonction de R.