Montrons l'existence et l'unicité de g: si F est une primitive de f fixée, $g' = f$ et $g \in E$ si et seulement si $g = F + C$ ave
$C = -\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$: il y a donc bien existence et unicité donc ϕ est une application;
Linéarité de ϕ : $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x$ linéaire en f.

$$\text{Écrivons } g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \Big[tF(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-1)f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty \frac{x^2}{2} + \|f\|_\infty \frac{(1-x)^2}{2}$ et $\max(x^2 + (1-x)^2) = 1$ (en 0 et 1 donc $\|g\|_\infty \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2}$ donc u continue e
$|||\,u\,||| \leqslant \frac{1}{2}$.

($\Rightarrow$) si f est continue $\operatorname{Ker} f = f^{<-1>}(\{0\})$ est fermé.
($\Leftarrow$) Si $\operatorname{Ker} f$ est fermé et $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$, alors $x_0 + \operatorname{Ker} f$ est fermé donc $E \setminus (x_0 + \operatorname{Ker} f)$ est ouvert et contient 0_E, donc $\exists r > 0,\ B_f(0_E, r) \subset E \setminus (x_0 + \operatorname{Ker} f)$. Soit $x \in B_f(0_E, r)$, si $\left|f(x)\right| > \left|f(x_0)\right|$ alors $\left\|\frac{f(x_0)}{f(x)}x\right\| = \frac{\left|f(x_0)\right|}{\left|f(x)\right|}\|x\| \leqslant \|x\| \leqslant r$ mais $f\left(\frac{f(x_0)}{f(x)}x\right) = f(x_0)$ donc $\frac{f(x_0)}{f(x)}x \in x_0 + \operatorname{Ker} f$ ce qui est impossible. Donc $\forall x \in B_f(0_E, r),\ \left|f(x)\right| \leqslant \left|f(x_0)\right|$ donc $\forall y \in E,\ \left|f(y)\right| \leqslant \frac{\left|f(x_0)\right|}{r}\|y\|$ et f est continue.
Pourtout $x \in \operatorname{Ker} f,\ \left|f(x_0)\right| = \left|f(x) - f(x_0)\right| \leqslant |||\,f\,|||\ \left\|x - x_0\right\|$ donc $\frac{\left|f(x_0)\right|}{|||\,f\,|||} \leqslant \left\|x - x_0\right\|$ donc $\frac{\left|f(x_0)\right|}{|||\,f\,|||} \leqslant d(x_0, H)$.
Par définition de $|||\,f\,|||$, il existe $y_n \in B_f(0_E, 1)$ tels que $\left|f(y_n)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |||\,f\,|||\ > 0$ donc il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \left|f(y_n)\right| > 0$ et on peut considérer $z_n = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(y_n)}y_n$: on a $f(z_n) = 0$ donc $\left\|z_n - x_0\right\| \geqslant d(x_0, H)$ soit $\frac{\left|f(x_0)\right|}{\left|f(y_n)\right|} \geqslant d(x_0, H)$ d'où, à la limite, $\frac{\left|f(x_0)\right|}{|||\,f\,|||} \geqslant d(x_0, H)$.

Linéarité facile. $\forall n \in \mathbb{N},\ N(x_{n+1} - x_n) \leqslant N(x_{n+1} + N(x_n) \leqslant 2\left\|(x_n)\right\|_\infty$ donc ϕ est un endomorphisme et $|||\phi||| \leqslant 2$. Si $E \neq \{0_E\}$, prenons x non nul et $x_n = (-1)^n x$, on a $\left\|(x_n)\right\|_\infty = N(x)$ et $\phi\big((x_n)\big) = -2(x_n)$ donc $\frac{\left\|\phi\big((x_n)\big)\right\|_\infty}{\left\|(x_n)\right\|_\infty} = 2 \leqslant |||\phi|||$ donc $|||\phi||| = 2$. Si $E = \{0_E\}$, $|||\phi||| = 0$.

Exercice 10 : [énoncé]

Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sin(n\pi\alpha) \neq 0$$

a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geqslant 1$$

la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leqslant 1$.

b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geqslant n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^n}$$

c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{K}{u_{n+1}}$$

Exercice 1 : [énoncé]

a) $R = 1$.

b) Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1}$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

A l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ ce qui assure que sa somme est continue.

On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\right)^2\right)$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$ et donc (v_n) est bornée par un certain M.
On a $|u_k v_{n-k}| \leqslant M\,|u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $\left(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc, par sommation par paquets, la famille $(u_k v_{n-k})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.
Par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}| < +\infty$$

Puisque

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}|$$

on a obtient $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} v_\ell$$

c) On a

$$(u \star v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v \star u)_n$$

et

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u \star (v \star w))_n$$

Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u \star \varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.
d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.
Si u est inversible et v son inverse, la relation $u \star v = \varepsilon$ donne
$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}$.
Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour tout
$n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. De même pour tout $n < 0$, $v_n = 0$
Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.
L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ n'est pas un groupe.

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^\star$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1)/k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1 - z}$$

Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geqslant 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leqslant 1$ $d(n) \leqslant n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geqslant 1$. On peut conclure $R_d = 1$.

La suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.
On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1, 1[$$

a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \to \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.
b) $u_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \to 0$ donc $R = +\infty$.
c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{n^2}{(n+1)^2}|z|^2 \to |z|^2$ donc $R = 1$.
d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n}|z|^3 \to \mathrm{e}|z|^3$ donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)|z| \to +\infty$ donc $R = 0$.
b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z| \to 4|z|$ donc $R = 1/4$.
c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}|z| \to 27|z|$ donc $R = 1/27$.
d) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$ or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$ donc $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.
Par suite $R = 1$.

a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geqslant 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2}|z|^n\right)_{n \geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut

$$R' = R^2$$

Soit $|z| < R$.
Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \to 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$.
Or pour $|Z| > R'$, on sait que la suite $(a_n^2 Z^n)$ n'est pas bornée. On en déduit $|z|^2 \leqslant R'$ et donc

$$R \leqslant \sqrt{R'}$$

Soit $|z| < \sqrt{R'}$.
On a $|z|^2 < R'$ et donc $|a_n^2 z^{2n}| \to 0$ puis $|a_n z^n| \to 0$. On en déduit $|z| \leqslant R$ et donc

$$\sqrt{R'} \leqslant R$$