

BL2 Sujet 1

Semaine de colle: 11

Autres sujets posés sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Intégrale de Riemann : critère de convergence et valeur

Exercice

Étudier la convergence et calculer, en cas de convergence, la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ puis de $\int_{-\infty}^0 t \exp(-t^2) dt$.

Exercice

On note f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.

On pose pour tout entier naturel non nul n , $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que I_n est bien définie sans expliciter I_n .
2. Sans expliciter $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'elle converge.
3. Expliciter $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$.
4. Montrer que $I_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$ pour tout entier naturel non nul n . En déduire la nature de la série de terme général I_n .

BL2 Sujet 2

Semaine de colle: 11

Autres sujets posés sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Critère de convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$

Exercice

Étudier la convergence et calculer, en cas de convergence, la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ puis de $\int_0^1 \ln^2(t) dt$.

Exercice

On pose : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt$.

1. Montrer, par comparaison, que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ converge. En déduire l'existence de I . Rappeler sa valeur.

2.(a) Grâce à un changement de variable, calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

(b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 - t - 1) dt$ (*indication : effectuer la factorisation canonique de $-t^2 - t - 1$ pour se ramener à I après changement de variable*). Calculer de même $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 + 3t - 2) dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

(a) Étudier $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{n+2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right)$. Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

$\forall t \geq A : 0 \leq t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leq \frac{1}{t^2}$. En déduire que l'intégrale I_n existe.

(b) Donner la valeur de I_0 puis calculer I_1 .

(c) Démontrer que : $I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis calculer I_n en fonction de n .

BL2 Sujet 3

Semaine de colle: 11

Autres sujets posés sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Théorème d'équivalence pour intégrale impropre de fonctions positives

Exercice

Étudier la convergence et calculer, en cas de convergence, la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2} dt$
puis de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|t|) dt$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)(\sqrt{x} + 1)}$. On note F la primitive de f s'annulant en 1.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer explicitement $F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement positif.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.