Par contraposée. Supposons que f ne soit par continue., l'application linéaire f n'est donc pas continue en 0 et par suite il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \|x\| \leqslant \alpha \text{ et } \|f(x)\| > \varepsilon$$

Pour $\alpha = 1/n$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| \leqslant 1/n$ et $\|f(x_n)\| > \varepsilon$.
Considérons alors $y_n = \sqrt{n} x_n$.
On a $\|y_n\| \leqslant 1/\sqrt{n}$ donc $y_n \to 0$ et $\|f(y_n)\| > \sqrt{n}\varepsilon \to +\infty$.
Ainsi (y_n) est une suite convergeant vers 0 dont la suite image $(f(y_n))$ n'est pas bornée.

La continuité de l'application linéaire Id_E de (E, N_1) vers (E, N_2) équivaut à l'existence d'un réel $\alpha \geqslant 0$ vérifiant $N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$ pour tout $x \in E$. La propriété annoncée est alors immédiate.

Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
On peut écrire $x = u(a) - a$ pour un certain $a \in E$ et on a $u(x) = x$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété $u^k(x) = x$ donne

$$u^{k+1}(a) - u^k(a) = x$$

En sommant ces relations pour k allant de 0 jusqu'à $n - 1$, on obtient

$$u^n(a) - a = nx$$

et donc

$$\|x\| = \frac{1}{n}\|u^n(a) - a\| \leqslant \frac{1}{n}\left(\|u^n(a)\| + \|a\|\right) \leqslant \frac{2}{n}\|a\| \to 0$$

Ainsi $x = 0$ et donc $\ker(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.
De plus, par la formule du rang

$$\dim\ker(u - \mathrm{Id}) + \dim\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$

et donc les deux espaces $\ker(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

Par l'absurde, supposons $\mathrm{rg} p \neq \mathrm{rg} q$ et, quitte à échanger, ramenons-nous au cas où $\mathrm{rg} p < \mathrm{rg} q$.
Par la formule du rang

$$\dim E - \dim \ker p < \mathrm{rg} q$$

et donc

$$\dim E < \dim \ker p + \mathrm{rg} q$$

On en déduit que les espaces $\ker p$ et $\mathrm{Im} q$ ne sont pas supplémentaires et donc il existe un vecteur $x \neq 0_E$ vérifiant

$$x \in \ker p \cap \mathrm{Im} q$$

On a alors

$$(p - q)(x) = p(x) - q(x) = -x$$

donc

$$N((p - q)(x)) = N(x)$$

Or

$$N((p - q)(x)) < N(x)$$

C'est absurde.

$T_\varphi : E \to \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_2 \, \|f\|_2$$

donc T_φ est continue.

Pour tout $f \in E$,

$$|\varphi(f)| = \int_0^1 |tf(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1$$

donc φ est continue.

a) L'application $N_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car la somme se limite à un nombre fini de termes non nuls.
Si $N_1(P) = 0$ alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

donc $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| + \left| Q^{(k)}(0) \right|$$

donc

$$N_1(P+Q) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| + \sum_{k=0}^{+\infty} \left| Q^{(k)}(0) \right| = N_1(P) + N_1(Q)$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \lambda P^{(k)}(0) \right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| = |\lambda| N_1(P)$$

Finalement N_1 est une norme.
L'application $N_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car une fonction continue sur un segment y est bornée.
Si $N_2(P) = 0$ alors

$$\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$$

Par infinité de racines $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_2(P+Q) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leqslant \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + |Q(t)|$$

donc

$$N_2(P+Q) \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q)$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda| \, |P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| = |\lambda| \, N_2(P)$$

Finalement N_2 est aussi norme.
b) Notons $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'opération de dérivation.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| D(P)^{(k)}(0) \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k+1)}(0) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^k(0) \right| = N_1$$

donc l'endomorphisme D est continu pour la norme N_1.
c) Soit $P_n = X^n$. On a $D(P_n) = nX^{n-1}$ donc $N_2(P_n) = 1$ et
$N_2(D(P_n)) = n \to +\infty$.
Par suite l'endomorphisme D n'est pas continu pour N_2.
d) Par ce qui précède, les normes ne sont pas équivalentes. Néanmoins
$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ donc

$$|P(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left| P^{(k)}(0) \right|}{k!} \leqslant N_1(P)$$

donc

$$N_2(P) \leqslant N_1(P)$$

C'est là la seule (et la meilleure) comparaison possible.