MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 14

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Preuve du théorème caractérisant la continuité des applications linéaires.

Exercice 1

Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace normé de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ ||u(x)|| \leqslant ||x||.$$

Montrer que les espaces $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. On munit E de $||\cdot||_1$ définie par :

$$\forall f \in E, ||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

   Soit g l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, g(f) = \int_0^1 f(t)tdt.$$

   Montrer que $||\cdot||_1$ est une norme puis que g est une forme linéaire continue.

2. On munit E de $||\cdot||_2$. Soit T l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, T(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt$$

   avec φ un élément fixé de E. Montrer que T est une forme linéaire continue.

MP **Sujet 2** | Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 14 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On munit E de $||\cdot||_1$. Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1],\ (u(f))(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $||u||$. *Pour la minoration de* $||u||$*, on se contentera d'exposer la démarche à l'oral.*

Exercice 1

Soit E un espace normé. Montrer que N_1 et N_2, deux normes sur E sont équivalentes si, et seulement si, Id_E est .... de ... vers .... et aussi .... de ... vers ....

Exercice 2

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, espace muni d'une norme N. On suppose :

$$\forall x \in E,\ N((p-q)(x)) < N(x).$$

Montrer que p et q sont de même rang.

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 14

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit $\Delta = \text{Diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On munit $\mathbb{C}$ de $||\cdot||_\infty$. Montrer que :

$$||\Delta|| = \rho(\Delta)$$

où $\rho(\Delta)$ désigne le rayon spectral de Δ.

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que f est continue.

Exercice 2

Pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^k(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \text{Sup}_{\,t\in[-1,1]}(|P(t)|).$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la dérivation est continue pour N_1.
3. Montrer que la dérivation n'est pas continue pour N_2.
4. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?