BL2 **Sujet 1** | Autres sujets posés sur:
Semaine de colle: 12 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Caractérisation des supplémentaires par la dimension.

Exercice

1. Démontrer que F l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = 0$ est un espace vectoriel.
2. Évaluer la dimension de F.
3. Démontrer que F et Vect $(1 + X + X^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice

On note f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.

On pose pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que I_n est bien définie sans expliciter I_n.
2. Sans expliciter $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire qu'elle converge.
3. Expliciter $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$.
4. Montrer que $I_n \geqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$ pour tout entier naturel non nul n. En déduire la nature de la série de terme général I_n.

BL2 **Sujet 2** Autres sujets posés sur:
Semaine de colle: 12 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Concaténation de base de sous-espaces supplémentaires.

Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique est M avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice

On considère les trois intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\ dt \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\ dx \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\ dx$$

Montrer que I, J et K sont de même nature. En déduire la nature de I.

BL2 **Sujet 3**
Semaine de colle: 12

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Caractérisation des sommes directes.

Exercice

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^2)dt$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ en posant $u=\sqrt{t}$.

Exercice

Soit l'application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter u, $\text{Im}\,(u)$ et $\text{Ker}(u)$.
2. Montrer que $\text{Im}\,(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires.