BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 x^2\exp(3x)dx$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y fonctions dérivables, en précisant sur quels intervalles les solutions sont définies :

1. $y' + xy = x^2 + 1$.
2. $(1+x^2)y' - 2xy = x$.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définir les sommes de Riemann associées à une fonction f sur un intervalle $[a;b]$. Énoncer le théorème de Riemann. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 e^t dt$.

Exercice 1

Comparer de deux façons différentes $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(t)dt$. Même consigne avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

Exercice 2

Dans le modèle de Verhulst, pour tout réel positif t, on a :

$$N'(t) = r \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$$

1. En introduisant la fonction $\dfrac{1}{N}$, expliciter N.
2. Interpréter les cas $N(0) < K$, $N(0) > K$ et $N(0) = K$.

BCPST1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Exposer la méthode de variation de la constante dans le cas général. Montrer qu'elle nous conduit à un simple calcul de primitive.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y fonctions dérivables, en précisant sur quels intervalles les solutions sont définies :

$$y' + \sin(x)y = 2\sin(x) \text{ puis : } y' - y = x^2 \times (e^x + e^{-x}).$$

Exercice 2

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx$$

On désire étudier le comportement asymptotique de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.
4. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.