

a) Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

b) Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si, et seulement si, $\alpha > 2$.

c) Posons $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon.

Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k \geq 0} |u_{k,n}|$ converge et $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}|$ converge donc on peut appliquer la formule de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$$

avec convergence des séries sous-jacentes.

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Notons que les termes sommés sont positifs.

Pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}$.

Par télescopage

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} \right) = \frac{1}{q^2}$$

La série $\sum_{q \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2}$ converge aussi, on peut donc affirmer que la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$$

est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right)$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p} \right)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^2 - p^2} = -\frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p-1} + \dots + 1 + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{2p-1} \right)$$

donc

$$\sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} \right) = \frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} > 0$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p \neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4n^2} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p \neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$$

On en déduit que la famille des $1/(n^2 - p^2)$ avec $(p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $p \neq n$ n'est pas sommable.

Par produit de Cauchy de série convergent absolument

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \frac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{3^m} \right) = \frac{9}{4}$$

a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$ et donc (v_n) est bornée par un certain M .

On a $|u_k v_{n-k}| \leq M |u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $\left(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n| \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc, par sommation par paquets, la famille $(u_k v_{n-k})_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable.

Par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| |v_{n-k}| < +\infty$$

Puisque

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| |v_{n-k}|$$

on obtient $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u \star v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} v_\ell$$

c) On a

$$(u \star v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v \star u)_n$$

et

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u \star (v \star w))_n$$

Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u \star \varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.

d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.

Si u est inversible et v son inverse, la relation $u \star v = \varepsilon$ donne

$$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}.$$

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. De même pour tout $n < 0$, $v_n = 0$

Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.

L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ n'est pas un groupe.

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k + 1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que \mathbb{N}^* est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k + 1) / k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m \in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1 - z}$$

Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geq 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

$d(n) \not\rightarrow 0$ donc $R_d \leq 1$ $d(n) \leq n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geq 1$. On peut conclure $R_d = 1$.

La suite (a_n) est bornée mais ne tend pas vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).

Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n .

En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend pas vers 0.

On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.

On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1, 1[$$

- a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \rightarrow \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.
- b) $u_n(z) = z^n e^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \rightarrow 0$ donc $R = +\infty$.
- c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \rightarrow |z|^2$ donc $R = 1$.
- d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \rightarrow e |z|^3$ donc $R = e^{-1/3}$.

a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = (n+1) |z| \rightarrow +\infty$ donc $R = 0$.

b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \rightarrow 4 |z|$ donc $R = 1/4$.

c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z| \rightarrow 27 |z|$ donc $R = 1/27$.

d) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n+1} \ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1 \right)$ or $e^{\frac{1}{n} \ln n} \rightarrow 1$ donc $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.
Par suite $R = 1$.

a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$. Finalement $R = 1$.

b) Posons $a_n = \sin n$.

(a_n) ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$. Finalement $R = 1$.

c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.

(a_n) est bornée donc $R \geq 1$.

Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2} |z|^n \right)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.

Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.

Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.

On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut

$$R' = R^2$$

Soit $|z| < R$.

Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \rightarrow 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \rightarrow 0$.

Or pour $|z| > R'$, on sait que la suite $(a_n^2 z^n)$ n'est pas bornée. On en déduit $|z|^2 \leq R'$ et donc

$$R \leq \sqrt{R'}$$

Soit $|z| < \sqrt{R'}$.

On a $|z|^2 < R'$ et donc $|a_n^2 z^{2n}| \rightarrow 0$ puis $|a_n z^n| \rightarrow 0$. On en déduit $|z| \leq R$ et donc

$$\sqrt{R'} \leq R$$