BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 11

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer le principe de récurrence.

Exercice 1

1. Montrer que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n).
   Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9$ (E_1) en sachant qu'il existe un polynôme du second degré solution de cette équation différentielle.
2. $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$. (E_2)

BCPST1 **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 11 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Exposer la méthode de variation de la constante dans le cas général. Montrer qu'elle nous conduit à un simple calcul de primitive.

Exercice 1

On rappelle que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ pour tout entiers naturels tels que $k < n$.
2. En déduire une explicitation de $\binom{n}{k}$ pour tout couple d'entiers naturels (k, n) avec $0 < n \leqslant 5$ et $k \leqslant n$.
3. Montrer que $(n+1)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n).
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ est un entier.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On cherche la (ou les) fonction(s) réelle(s) vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\frac{1}{n^2}y'' + y = \sin(t), \ y(0) = 0 \ \text{ et } \ y'(0) = 0 \ (E_n)$$

1. Vérifier que la fonction y_n ci-dessous est une solution de (E_n) :

$$y_n : t \mapsto \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) + b_n \sin(nt)$$

   avec b_n une constante à préciser.
2. Évaluer y la fonction définie par : Pour tout réel t, $y(t) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (y_n(t))$.
3. (E_n) a-t-il d'autres solutions ?

BCPST1 **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 11 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Retrouver l'expression des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double.

Exercice 1

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 2

On considère les équations différentielles $(E) : (2-6x+2x^2)y-(3x^2-4x)y'+x^2y''=2$ et $(L) : z''-3z'+2z=2$.

1. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver un entier relatif k tel que $x \mapsto x^k$ soit solution de (E) sur $]0,+\infty[$.
3. Pour cet entier k, montrer que la fonction $u : x \mapsto x^k \times v(x)$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si v est solution de (L) sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.