BCPST1 **Sujet 1** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 13 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Rappeler la définition du rang d'un système linéaire. Exposer la méthode de résolution d'un système échelonné.

Exercice 1

Un enfant dispose de sept crayons de couleurs différentes. Il doit colorier un dessin composé de 5 zones numérotées de 1 à 5.

1. On suppose que l'enfant colorie les 5 zones de 5 couleurs différentes. Déterminer le nombre de façons différentes qu'a l'enfant de colorier le dessin.
2. On suppose maintenant que plusieurs zones peuvent recevoir la même couleur. Répondre à la même question.

Exercice 2

On pose $A = \sum_{k=1}^{n} k^3$ avec n un entier naturel non nul. On va calculer A de trois façons différentes.

1. A partir de $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4)$...
2. Après avoir calculé $(x(x+1))^2 - (x(x-1))^2$ pour tout réel x...
3. Après avoir déterminé un polynôme Q tel que, pour tout réel x, on ait $Q(x) - Q(x-1) = x^3$.
4. Proposer une méthode pour déterminer $\sum_{k=1}^{n} k^4$ et $\sum_{k=1}^{n} k^5$.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Donner la définition d'un système échelonné et un ou deux exemples.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} 5x + 8y - 7z &= 5 \\ 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 9 \\ 2x + 3y + 5z &= 7 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 1 \end{cases}.$$

Exercice 2

1. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n).
2. Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ est un entier.

BCPST1 **Sujet 3** Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Énoncer et démontrer la propriété des sommes télescopiques. Application : calculer $\sum_{k=1}^{n} kk!$.

Exercice 1

On prélève cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes (une main désignant un ensemble de 5 cartes distinctes) ?
2. Parmi elles, combien contiennent exactement deux cœurs ?
3. Parmi elles, combien contiennent au moins un roi ?
4. Parmi elles, combien contiennent exactement deux paires ?
5. Parmi elles, combien contiennent un full (i.e. un brelan et une paire) ?

Exercice 2

Résoudre les deux systèmes suivants pour se chauffer :

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 2 \\ 3x+y+2z &= 1 \\ 2x+3y+z &= 0 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} x+3y-7z+2t &= 1 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ x-y-2z+t &= -1 \\ x+7y-4z+t &= 3 \end{cases}$$

puis discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres (a, b) complexe, le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{cases}$$