MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 17

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Proposer deux méthodes de calcul de la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_1[X]$ et en rédiger une.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que, pour tout $(a_1; \cdots; a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$
2. Déterminer le minimum de $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \times \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ quand $(a_1; \cdots; a_n)$ décrit $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^n$.

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi \colon E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par : Pour tout polynômes P et Q, on a :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\exp(-t)dt$$

1. Justifier que l'application φ est bien définie.
2. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
3. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
4. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 17

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et étude du cas d'égalité.

Exercice 1

On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1]\,,\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par, pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Pour tout f dans E, on note F la primitive de f qui s'annule en 0 et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.

1. Déterminer un endomorphisme v^* vérifiant

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle$$

2. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.

Exercice 2

Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par : Pour tout (x,y) de E^2, on pose :

$$\varphi(x,y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur E.
2. Imaginons que E soit $\mathbb{R}^3$ et que $\langle \cdots, \cdots \rangle$ soit le produit scalaire euclidien, orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire φ .

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 17

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Question de cours

Détermine la distance avec le produit scalaire $\varphi : (A, B) \mapsto Tr(A^T B)$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ à l'ensemble des matrices triangulaires supérieurs.

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la famille $(\cos, \sin, \exp)$.

Exercice 2

Soient x_1, x_2, $\cdots$, x_{n+2} des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il est impossible que pour tout (i, j) de $(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)^2$ tel que $i \neq j$, on ait $\langle x_i, x_j \rangle < 0$.