

BL2 Sujet 1

Semaine de colle: 18

Autres sujets posés sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définition des éléments propres et sous-espaces propres d'une matrice.

Exercice

La matrice A suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice

On considère trois réels a_1, a_2 et a_3 avec $a_1 < a_2 < a_3$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 + 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\text{rang}(A) \geq 2$.
2. Montrer que A admet 3 valeurs propres distinctes, que l'on notera par la suite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
3. Montrer que a_1, a_2 et a_3 ne sont pas valeurs propres de A .
4. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors :

$$\frac{1}{\lambda - a_1} + \frac{1}{\lambda - a_2} + \frac{1}{\lambda - a_3} = 1$$

5. Déterminer le nombre de solution de l'équation

$$\frac{1}{\lambda - a_1} + \frac{1}{\lambda - a_2} + \frac{1}{\lambda - a_3} = 1$$

d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ et conclure.

BL2 Sujet 2

Semaine de colle: 18

Autres sujets posés sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation. Cas matriciel.

Exercice

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(A - I_3)$. Qu'en déduit-on ?
2. 0 est-elle valeur propre de A ?
3. Pourquoi 4 est valeur propre de A ? Donner alors un élément de $E_4(A)$.

Exercice

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que X est un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ . Montrer que $A^3 X = \lambda^3 X$.
2. Calculer $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3$.
3. Calculer $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$.
4. En déduire les valeurs propres de A .
5. A est -elle diagonalisable ?

BL2 Sujet 3

Semaine de colle: 18

Autres sujets posés sur:

cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Valeurs propres d'une matrice d'ordre 2.

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 3 est valeur propre de A puis déterminer un vecteur propre associée à cette valeur propre.
2. A-t-on $-2 \in Sp(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre de $E_{-2}(A)$.
3. A-t-on $2 \in Sp(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre de $E_2(A)$.

Exercice

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A . A est-elle inversible? 0 est-il valeur propre de A ?
2. Calculer $(A - I_6)^2$. En déduire, pour tout entier naturel n , la matrice A^n .
3. A est-elle diagonalisable? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.