1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   (b) On obtient $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (c) $\mathrm{rg}A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
   Puisque $\mathrm{tr}A = 3$ et que $\mathrm{tr}A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
   Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.
2. On note $e = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.
   $E_3(f) = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
   Donc $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
   $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
   On les normalise et on pose $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.
   Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.
   On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

1. (a) Les vecteurs colonnes de la matrice A sont deux à deux orthogonaux et de norme 1, donc $A \in O(3)$.
   Or (i, j, k) est une base orthonormée de E, donc $f \in O(E)$.
   (b) Pour déterminer les vecteurs invariants, on résout le système $AX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = X \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases}$$

   Donc $AX = X \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{6}L_1}{\iff} \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

   Donc l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite $\Delta = \mathrm{Vect}(i + j)$.
2. Comme $\dim \Delta = 1$, d'après les résultats sur la réduction d'une isométrie vectorielle en dimension 3, f est nécessairement une rotation.
   On oriente l'axe Δ de cette rotation par le vecteur $i + j$.

   Déterminons l'angle θ de la rotation f.
   Comme la trace est invariante par changement de base, $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}A$.
   On en déduit que $\cos\theta = \frac{1}{2}$. (1)

   Il reste donc à déterminer le signe de $\sin\theta$.
   On pose $w = \frac{i + j}{||i + j||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.
   On a donc $\Delta = \mathrm{Vect}w$ avec w unitaire.
   Si u est un vecteur unitaire orthogonal à Δ, alors $\sin\theta = \mathrm{Det}(u, f(u), w)$. Prenons par exemple $u = k$.

   On a $f(u) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
   On calcule alors le déterminant :

$$\mathrm{Det}(u, f(u), w) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   c'est-à-dire $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{3} \bmod (2\pi)$.

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
Montrons que chaque colonne de A ne comporte qu'au plus un coefficient non nul.
Par l'absurde, supposons que la j-ème colonne de A possède au moins deux coefficients non nuls situés en k-ième et en ℓ-ième ligne. Puisque les colonnes de A sont orthogonales, on a pour tout $j' \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = 0$$

Sachant que tous les coefficients sont positifs, cette équation équivaut à

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j}a_{i,j'} = 0$$

et on en tire

$$a_{k,j'} = a_{\ell,j'} = 0$$

Ainsi les $n - 1$ colonnes correspondant aux indices autres que j appartiennent à l'espace formé des colonnes dont les k-ième et ℓ-ième coefficients sont nuls. Or ces $n - 1$ colonnes sont indépendantes et cet espace est de dimension $n - 2$. C'est absurde.

Puisque les colonnes de A sont de norme 1 et que ses coefficients sont positifs, sur chaque colonne figure un 1 et $n - 1$ coefficients nuls.
Le même raisonnement peut être adapté aux lignes de A pour affirmer que chacune d'elles contient un coefficient 1 et $n - 1$ coefficients nuls.
Inversement, on vérifie aisément qu'une telle matrice est une matrice orthogonale à coefficients positifs.
En fait, les matrices considérés sont les matrices de permutation, il y en a $n!$

($\Rightarrow$) Si V est stable pour f alors $f(V) \subset V$ et puisque f est un automorphisme $f(V) = V$. Soient $x \in V^\perp$ et $y \in V$

$$(f(x) \mid y) = (x \mid f^{-1}(y)) = 0$$

car $f^{-1}(y) \in V$ donc $f(x) \in V^\perp$ puis $V^\perp$ stable par f.
($\Leftarrow$) Si $V^\perp$ stable par f alors $V = V^{\perp\perp}$ aussi

Soit λ valeur propre de f. Pour x vecteur propre, on a $f(x) = \lambda x$ avec $\|f(x)\| = \|x\|$ d'où $\lambda = \pm 1$. Une diagonalisation de f est alors réalisée avec des 1 et des -1 sur la diagonale, c'est une symétrie.

On a

$$A^7 = A^4 \times (A^t A) = A^{5t} A$$

puis

$$A^7 = A^3 \left({}^tA\right)^2 = A\left({}^tA\right)^3 = A^t\left(A^t A\right) = A^{2t}A = A^4$$

Ainsi $X^7 - X^4 = X^4(X^3 - 1)$ annule A.
Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\ker A^4 = \ker A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3 - 1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, cela sera décisif pour conclure.
Evidemment $\ker A \subset \ker A^4$. Inversement, soit $X \in \ker A^4$. On a

$$A^t AAX = A^4 X = 0$$

donc

$$\left\|{}^tAAX\right\|^2 = {}^tX^tAA^tAAX = 0$$

et par conséquent ${}^tAAX = 0$. Alors

$$\|AX\|^2 = {}^tX^tAAX = 0$$

et donc $AX = 0$. Ainsi $\ker A^4 \subset \ker A$ puis l'égalité.

(a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_0^1 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,(G(1) - G(x))\,\mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^*(g) : x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x) \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha\cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.
Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.