

# MP Sujet 1

Semaine de colle: 18

Corrigé dès mercredi sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Question de cours

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$  et  $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$ .

## Exercice 1

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On suppose que  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières différentes.
2. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

## Exercice 2

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$A^3 = AA^T$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

## MP Sujet 2

Semaine de colle: 18

Corrigé dès mercredi sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Soit  $u \in S(E)$ , on a :  $u \in S^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ .

#### Exercice 1

On munit l'espace  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par, pour tout  $(f, g) \in E^2$ , on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Pour tout  $f$  dans  $E$ , on note  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0 et on considère l'endomorphisme  $v$  de  $E$  déterminé par  $v(f) = F$ .

1. Déterminer l'adjoint  $v^*$  de  $v$ .
2. Que peut-on dire du signe des valeurs propres de l'endomorphisme  $v^* \circ v$ ?
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme  $v^* \circ v$ .

#### Exercice 2

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{O}(E)$ ,  $E$  espace euclidien, et  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. Montrer que  $V$  est stable par  $f$  si et seulement si  $V^\perp$  l'est.
2. Déterminer les matrices de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

## MP Sujet 3

Semaine de colle: 18

Corrigé dès mercredi sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Il existe  $S$  dans  $S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $S^2 = A$ .

#### Exercice 1

On pose  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ . On suppose que  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans une base orthonormée.

1. Prouver que  $f$  est un endomorphisme orthogonal.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par  $f$ .
3. En déduire la nature de  $f$  ainsi que ses éléments caractéristiques.

#### Exercice 2

1. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{O}(E)$ ,  $E$  espace euclidien, et  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $V$  est stable par  $f$  si et seulement si  $V^\perp$  l'est.
2. On suppose  $f$  diagonalisable. Montrer que  $f$  est une symétrie.