BL2 **Sujet 1** Autres sujets posés sur:

Semaine de colle: 19 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Loi uniforme sur $[a, b]$: densité, espérance, fonction de répartition.

Exercice

Soient a un réel et X une variable aléatoire de densité f où f est définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{a}{x\sqrt{x}} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver a.
2. Quelle est la fonction de répartition F de X ?
3. Montrer que l'espérance de X n'existe pas.

Exercice

Soient θ un réel strictement positif et X une variable aléatoire de densité f où f est définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Quelle est la fonction de répartition F de X ?
3. Calculer l'espérance de X en cas d'existence.
4. Calculer la variance de X en cas d'existence.
5. Expliciter $P(-2 \leqslant X \leqslant 10)$.
6. Posons : $Y = \theta X^2$. Déterminer la loi de Y.
7. Calculer l'espérance et la variance de Y en cas d'existence.

BL2 **Sujet 2**
Semaine de colle: 19

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Loi exponentielle : densité, espérance, fonction de répartition.

Exercice

Soit X une variable aléatoire de densité f où f est définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \dfrac{\exp(-x)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité et expliciter la fonction de répartition F de X.

Exercice

On pose $Y = X^2$ avec X qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Quelle est la fonction de répartition F de X ?
2. Calculer l'espérance de X en cas d'existence.
3. Calculer la variance de X en cas d'existence.
4. Expliciter $P(-2 \leqslant X \leqslant 10)$ et comparer le à $P(|X - 20| \geqslant 3)$.
5. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
6. Calculer l'espérance et la variance de Y en cas d'existence.

BL2 **Sujet 3**
Semaine de colle: 19

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

densité : définition ? Espérance d'une variable à densité : définition ?

Exercice

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t^n e^{-t}}{n!} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge.
2. Relier $\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ pour x réel strictement positif et n entier naturel non nul.
3. En déduire que f_n est une densité. On note X_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité.
4. Expliciter l'espérance et la variance de X_n.
5. Pour tout réel strictement positif t, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t. On suppose que Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire Z_n égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0. Montrer que la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} pour densité.