

# MP Sujet 1

Semaine de colle: 19

Corrigé dès mercredi sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Question de cours

Loi de Poisson : Loi, espérance, variance ?

### Exercice 1

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On suppose que  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières différentes.
2. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

### Exercice 2

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, puis, si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne, sinon, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place. On recommence ce processus jusqu'à la fin des temps... Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $R_n$  est l'événement : "On a extrait une boule rouge de l'urne lors de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve",  $Y_n$  la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve et  $u_n$  la quantité  $P(Y_n = 1)$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $p$ , on a :  $u_{p+1} = \frac{2}{3}u_p + \frac{2}{3^{p+1}}$ .
2. Montrer que la suite  $\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique et en déduire, pour tout entier naturel  $p$ , la loi de  $Y_p$ .

## Question de cours

Loi géométrique : Loi, espérance, variance ?

## Exercice 1

On munit l'espace  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par, pour tout  $(f, g) \in E^2$ , on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Pour tout  $f$  dans  $E$ , on note  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0 et on considère l'endomorphisme  $v$  de  $E$  déterminé par  $v(f) = F$ .

1. Déterminer l'adjoint  $v^*$  de  $v$ .
2. Que peut-on dire du signe des valeurs propres de l'endomorphisme  $v^* \circ v$  ?
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme  $v^* \circ v$ .

## Exercice 2

C'est l'anniversaire de Monsieur Bacquelin, votre colleur préféré, aujourd'hui (on est donc le 20 septembre) et ses amis viennent lui présenter leurs vœux. Le nombre  $N$  de personnes ayant effectué le déplacement suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  réel strictement positif). Pour les remercier, ses amis étant trop nombreux, Monsieur Bacquelin offre à chacun d'eux un cadeau de façon aléatoire. Chacun recevra un cadeau avec la probabilité  $p$  avec  $p \in ]0, 1[$  et ceci de façon indépendante.

1. Soit  $X$  le nombre de visiteurs ayant reçu un cadeau. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Soit  $Y$  le nombre de visiteurs qui n'ont pas de cadeau. Déterminer la loi de  $Y$ .
3. Montrer que, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , les événements  $(X = n)$  et  $(Y = m)$  sont indépendants.

**Question de cours**

Fonctions génératrices : définition et propriétés ?

**Exercice 1**

On pose  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ . On suppose que  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans une base orthonormée.

1. Prouver que  $f$  est un endomorphisme orthogonal.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par  $f$ .
3. En déduire la nature de  $f$  ainsi que ses éléments caractéristiques.

**Exercice 2**

Un cirque s'installe dans une ville de  $n$  habitants ( $n$  entier supérieur à 2). Chaque soir, toute personne n'ayant pas encore vu le spectacle a une probabilité  $p$  de s'y rendre (avec  $p$  élément de  $]0, 1[$  fixé). Les personnes vont voir au plus une fois le spectacle. Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $X_k$  le nombre de spectateurs de la  $k$ -ième représentation.

1. Quelle est la loi de  $X_1$  ?
2. Quelle est la loi du couple  $(X_1, X_2)$  ?
3. Quelle est la loi de  $X_2$  ? Reconnaitre une loi usuelle.
4. Quelle est la loi de  $X_1 + X_2$  ? Reconnaitre une loi usuelle.
5. Quelle est la loi de  $X_1 + \dots + X_k$  ?