

## BL2 Sujet 1

Semaine de colle: 20

Autres sujets posés sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Loi uniforme sur  $[a, b]$  : densité, espérance, fonction de répartition.

#### Exercice

Soient  $a$  un réel et  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  où  $f$  est définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{x\sqrt{x}} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver  $a$ .
2. Quelle est la fonction de répartition  $F$  de  $X$  ?
3. Montrer que l'espérance de  $X$  n'existe pas.

#### Exercice

Soient  $\theta$  un réel strictement positif et  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  où  $f$  est définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.
2. Quelle est la fonction de répartition  $F$  de  $X$  ?
3. Calculer l'espérance de  $X$  en cas d'existence.
4. Calculer la variance de  $X$  en cas d'existence.
5. Expliciter  $P(-2 \leq X \leq 10)$ .
6. Posons :  $Y = \theta X^2$ . Déterminer la loi de  $Y$ .
7. Calculer l'espérance et la variance de  $Y$  en cas d'existence.

## BL2 Sujet 2

Semaine de colle: 20

Autres sujets posés sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Loi exponentielle : densité, espérance, fonction de répartition.

#### Exercice

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  où  $f$  est définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, -1] \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in ]-1, 0] \\ \frac{\exp(-x)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité et expliciter la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

#### Exercice

On pose  $Y = X^2$  avec  $X$  qui suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1. Quelle est la fonction de répartition  $F$  de  $X$  ?
2. Calculer l'espérance de  $X$  en cas d'existence.
3. Calculer la variance de  $X$  en cas d'existence.
4. Expliciter  $P(-2 \leq X \leq 10)$  et comparer le à  $P(|X - 20| \geq 3)$ .
5. Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de  $Y$ .
6. Calculer l'espérance et la variance de  $Y$  en cas d'existence.

## BL2 Sujet 3

Semaine de colle: 20

Autres sujets posés sur:

[cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle](http://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

densité : définition ? Espérance d'une variable à densité : définition ?

#### Exercice

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

#### Exercice

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^n e^{-t}}{n!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  converge.
2. Relier  $\int_0^x f_n(t) dt$  et  $\int_0^x f_{n-1}(t) dt$  pour  $x$  réel strictement positif et  $n$  entier naturel non nul.
3. En déduire que  $f_n$  est une densité. On note  $X_n$  une variable aléatoire admettant  $f_n$  pour densité.
4. Expliciter l'espérance et la variance de  $X_n$ .
5. Pour tout réel strictement positif  $t$ , on définit la variable aléatoire  $Y_t$  égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant  $t$ . On suppose que  $Y_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $t$ . Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on définit la variable aléatoire  $Z_n$  égale à l'instant d'arrivée de la  $n$ -ième voiture au péage à partir de l'instant 0. Montrer que la variable aléatoire  $Z_n$  admet  $f_{n-1}$  pour densité.