MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 20

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique sur *, de paramètre $p \in]0,1[$. Existence et calcul de sa variance. En bonus de la question de cours, un petit exo : montrer que pour tout $(k, \ell) \in (^*)^2$ on a $P_{(X>k)}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$ puis expliquer ce que cela signifie.

Exercice 1

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, puis, si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne, sinon, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place. On recommence ce processus jusqu'à la fin des temps... Pour tout entier naturel n non nul, R_n est l'événement : "On a extrait une boule rouge de l'urne lors de la $n^{ième}$ épreuve", Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve et u_n la quantité $P(Y_n = 1)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel p, on a : $u_{p+1} = \dfrac{2}{3}u_p + \dfrac{2}{3^{p+1}}$.
2. Montrer que la suite $\left(u_n + \dfrac{2}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est géométrique et en déduire, pour tout entier naturel p, la loi de Y_p.

Exercice 2

C'est l'anniversaire de Monsieur Bacquelin, votre colleur préféré, aujourd'hui (on est donc le 20 septembre) et ses amis viennent lui présenter leurs voeux. Le nombre N de personnes ayant effectué le déplacement suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ réel strictement positif). Pour les remercier, ses amis étant trop nombreux, Monsieur Bacquelin offre à chacun d'eux un cadeau de façon aléatoire. Chacun recevra un cadeau avec la probabilité p avec $p \in]0, 1[$ et ceci de façon indépendante.

1. Soit X le nombre de visiteurs ayant reçu un cadeau. Déterminer la loi de X.
2. Soit Y le nombre de visiteurs qui n'ont pas de cadeau. Déterminer la loi de Y.
3. Montrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, les événements $(X = n)$ et $(Y = m)$ sont indépendants.

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 20

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ, μ. Proposer deux méthodes et en rédiger une.

Exercice 1

On lance une pièce amenant pile avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ jusqu'à obtenir deux fois de suite pile. On note X le nombre de lancer effectués et on pose, pour tout entier naturel n, $u_n = P(X = n)$.

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur à 3, on a :
$$u_n = \frac{u_{n-1}}{3} + \frac{2u_{n-2}}{9}.$$
2. En déduire la loi de X.

Exercice 2

Un cirque s'installe dans une ville de n habitants (n entier supérieur à 2). Chaque soir, toute personne n'ayant pas encore vu le spectacle a une probabilité p de s'y rendre (avec p élément de $]0, 1[$ fixé). Les personnes vont voir au plus une fois le spectacle. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k le nombre de spectateurs de la k-ième représentation.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?
3. Quelle est la loi de X_2 ? Reconnaître une loi usuelle.
4. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$? Reconnaître une loi usuelle.
5. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_k$?

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 20 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique sur de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $\min\{X, Y\}$.

Exercice 1

Il y a huit caisses dans un magasin. On estime que N clients achètent chaque jour quelque chose dans ce magasin et que chacun choisit une caisse au hasard. On note A le nombre de client sortant par la caisse 1 aujourd'hui. En supposant que N suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ réel strictement positif), déterminer la loi de A.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = P(Y = k) = \frac{1}{2^k}.$$

1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X < Y)$.
2. Notons $Z = \inf(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$. Donner la loi du couple (Z, T). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
3. Soit r un entier strictement positif. Calculer $P(X = rY)$.