

Question de cours

Énoncer les règles de calcul sur les degrés des polynômes. Les démontrer dans le cas de polynômes non constants.

Exercice 1

1. Soit $P : x \mapsto x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$ (avec n un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de P et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de $Q : x \mapsto x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ et $R : x \mapsto x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ sachant qu'ils possèdent une racine commune.

Exercice 2

Soit θ un réel. Pour tout réel x , pour tout entier naturel n , on pose :

$$P_n(x) = x^{n+1} \cos((n-1)\theta) - x^n \cos(n\theta) - x \cos(\theta) + 1 \quad \text{et} \quad A(x) = x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1.$$

Montrer que, pour tout réel x , pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$P_n(x) = \cos((n-1)\theta)x^{n-1}A(x) + P_{n-1}(x)$$

et en déduire que P_n est divisible par A et évaluer son quotient.

Question de cours

Définition des racines d'un polynôme et lien avec la factorisation. Comparaison du degré et du nombre de racines d'un polynôme.

Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de

$$P : x \mapsto x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24?$$

2. Déterminer le réel a pour que -1 soit racine double du polynôme :

$$P : x \mapsto x^5 + ax^2 + ax + 1.$$

Exercice 2

On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes en posant :

$$T_0 : x \mapsto 1, T_1 : x \mapsto x, \text{ et } T_{n+2} : x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. Expliciter T_5 .
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n .
3. Montrer que, pour tout réel θ , $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire toutes les racines de T_n et T'_n .

Question de cours

Définition et caractérisation des racines multiples d'un polynôme. Factorisation d'un polynôme de degré n possédant n racines (avec les multiplicités).

Exercice 1

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les trois droites suivantes :

1. (D_1) d'équation cartésienne : $x + 3y - 5 = 0$
2. (D_2) d'équation cartésienne : $x - 2y + 5 = 0$
3. (D_3) d'équation cartésienne : $4x - 3y - 10 = 0$.

Calculer l'aire du triangle déterminé par ces droites.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré 2023 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2023 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2024)$. Pour cela, pour tout complexe x , on pose :

$$Q(x) = (x+1) \times P(x) - x.$$

1. Déterminer le degré de Q .
2. Déterminer toutes les racines de Q .
3. Calculer $Q(-1)$.
4. En déduire la factorisation de Q .
5. Calculer $Q(2024)$ puis $P(2024)$.
6. Écrire une fonction Python prenant en entrée un réel x et donnant en sortie $P(x)$.
On prendra soin de tester cette fonction pour qu'elle donne des résultats corrects au moins pour x "pas trop grand" et positif.