BCPST1 **Sujet 1** — Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17 — cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Développement limité en 0 d'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de exp. Exposer la méthode pour obtenir les DL en a et en l'infini.

Exercice 1

Soient $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ et $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$.

1. (a) Montrer que P et Q ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de P, puis comme racine de Q.

   (b) Factoriser P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Q divise-t-il P?

2. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

Exercice 2

Soit θ un réel. Pour tout réel x, pour tout entier naturel n, on pose :

$$P_n(x) = x^{n+1}\cos((n-1)\theta) - x^n\cos(n\theta) - x\cos(\theta) + 1 \quad \text{et} \quad A(x) = x^2 - 2\cos(\theta)x + 1.$$

Montrer que, pour tout réel x, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$P_n(x) = \cos((n-1)\theta)x^{n-1}A(x) + P_{n-1}(x)$$

et en déduire que P_n est divisible par A et évaluer son quotient.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Développement limité en 0 d'ordre 3 de sin et cos. Exposer la méthode pour obtenir le DL d'un quotient.

Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de
$$P : x \mapsto x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24?$$
2. Déterminer le réel a pour que -1 soit racine double du polynôme :
$$P : x \mapsto x^5 + ax^2 + ax + 1.$$

Exercice 2

On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes en posant :

$$T_0 : x \mapsto 1, T_1 : x \mapsto x, \text{ et } T_{n+2} : x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. Expliciter T_5.
2. Déterminer le degré, le cœfficient dominant et la parité de T_n.
3. Montrer que, pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire toutes les racines de T_n et T_n'.

BCPST1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Développement limité en 0 d'ordre 3 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$. Exposer la méthode pour obtenir le DL d'une composée.

Exercice 1

Déterminer les racines du polynôme $P : x \mapsto x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ en sachant qu'il y a une racine « évidente » multiple.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré 2023 vérifiant :

$$\forall k \in [\![0, 2023]\!],\ \ P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2024)$. Pour cela, pour tout complexe x, on pose :

$$Q(x) = (x+1) \times P(x) - x.$$

1. Déterminer le degré de Q.
2. Déterminer toutes les racines de Q.
3. Calculer $Q(-1)$.
4. En déduire la factorisation de Q.
5. Calculer $Q(2024)$ puis $P(2024)$.
6. Écrire une fonction Python prenant en entrée un réel x et donnant en sortie $P(x)$. On prendra soin de tester cette fonction pour qu'elle donne des résultats corrects au moins pour x "pas trop grand" et positif.