MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 22

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Différentiabilité en tout point et calcul de la différentielle en tout point de $f : M \mapsto M^2$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On proposera au moins deux méthodes, une seule sera rédigée.*

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition et étudier les extremums de la fonction f suivante :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - 4x + 3 + y^3 + 6y.$$

Même question avec la fonction q suivante :

$$q : (x, y) \mapsto -x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0, 0) = 0$ et :

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^+ y^2} \text{ pour tout } (x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

   Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.

   (b) f est-elle continue en $(0, 0)$?

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 22

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et :

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 1

Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y - xy^2$.

1. Chercher les points critiques de f.
2. Calculer $f(x, 2x)$ pour x réel.
3. En déduire que f n'admet pas d'extremum.
4. Démontrer de nouveau ce résultat grâce aux théorèmes de votre cours.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par, pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose :

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln\left(x^2+y^2\right)$$

1. Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
2. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et établir que, pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 22

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Différentiabilité d'une application bilinéaire et différentielle en tout point

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition et étudier les extremums de la fonction f suivante :

$$f : (x, y) \mapsto (y - x) \exp(-y + x).$$

Même question avec la fonction q suivante :

$$q : (x, y) \mapsto 4x^2 - 2xy - y^2.$$

Exercice 2

Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et x_0 un vecteur de E. On étudie la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \frac{1}{2} \langle x, u(x) \rangle + \langle x, x_0 \rangle$$

1. Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
2. Calculer le gradient de f en tout point de E.